AMERICAN
UNIVERSITY OF
BEIRUT

A.C.E. LIBRARY

فهرس المواد

الفصل		الصفحة القسم الاول	القسم الثاني
١	الرموز والقوانين الرمزية والاعمال	١	٢٥
٢	الكميات السلبية والخطوط البيانية	٣٧	٤٩
٣	الجمع والطرح	٦٥	٧٩
٤	المعادلة البسيطة	٨٩	١٠٥
٥	الضرب والقسمة	١١٢	١٣٨
٦	اختصارات الضرب والقسمة . السط	١٤٣	١٤٨
٧	المعادلات البسيطة	١٥١	١٦٠
٨	حلّ الاضلاع	١٦٧	١٨٣
٩	الكسور	٢٠٧	٢٣١
١٠	المعادلات الكسرية والحرفية	٢٤٣	٢٥٥
١١	المعادلات الآنية	٢٦٢	٢٧٩
١٢	الخطوط البيانية	٢٨٣	٢٩٣
١٣	الترقية والتجذير	٢٩٨	٣٠٨
١٤	الجذور	٣١٢	٣٣٠
١٥	معادلات الدرجة الثانية	٣٣٧	٣٤٣

المقدّمة

وضعت هذا الكتاب اجابة لطلب ادارة المطبعة الاميركانية والغاية منه بسط المبادىء والاساليب الحديثة التي تناسب متطلبات العصر الحاضر وهاك بعضها

(١) الانتقال تدريجيًا وبسهولة تامة من الحساب الى الجبر

(٢) التطبيقات العملية وخصوصًا ما كان له علاقة بالقوانين الرمزية والخطوط البيانية

(٣) التشديد على فهم المبادىء الاساسية والمقدرة على استخدامها كلما دعت اليها الحاجة

(٤) ترتيب المواد واستخدام ما ينطبق منها على المعاملات ويتعلق بالعلوم الطبيعية

وقد اسهبت في بسط القوانين الرمزية والخطوط البيانية وقسمت مواد كل فصل الى قسمين وجعلت القسم الاول يتضمن ابسط مبادىء الفصل والمواد السهلة الادراك والفهم والقسم الثاني يتناول النظريات والشرح المسهب والمواد الصعبة . فيدرس الطلبة اولاً جميع الاقسام الاولى بالتتابع وفي النهاية حين يبدأون بالمراجعة يتناولون مع كلٍّ من الاقسام الاولى القسم الثاني الذي يليه. ومع ان هذه افضل طريقة للجري بموجبها لكن اذا اراد الاستاذ ان يدرّس كل فصل بفصله تامًا — القسم الاول والثاني معًا — فترتيب المواد يمكّنه من القيام برغبته بكل سهولة

ولاجل التنويع اكثرت من المسائل الشفهية واستخدمت اسهل الوسائط لبسط القضايا والنظريات طبقًا لاحدث مبادىء التهذيب المعوّل عليها في البلدان المتمدنة

512
J95jA
v.1
c.1

الجبر الحديث

الكتاب الاول

تأليف

منصور حنا جرداق م.ع
أستاذ الرياضيات العالية في الجامعة الاميركية عضو
في الجمعية الانكليزية الرياضية في لندن
والجمعية الرياضية الاميركانية

29152

طبعة اولى

طبع في المطبعة الاميركانية في بيروت سنة ١٩٢٥

ومع انني قد استخدمت الاساليب والطرق السهلة المتبعة في الولايات المتحدة لكنني حافظت على الدقة والضبط المنطقي والصعوبة التي تمتاز بهـــا مؤلفات الانكليز والفرنساويين

وقد طالعت كثيرًا من كتب الغربيين القديمة والحديثة واخترت منها ما يناسب عقلية الطلبة في بلادنا الشرقية ونقلت الثمارين الموقتة عن استاذي وصديقي الدكتور سمث من جامعة كولمبيا وقسمًا من المسائل التي تحلّ بمعادلات الدرجة الثانية عن مؤلفات الاستاذين هول ونايت

وارجو رجاء خاصًا من اخواني الاساتذة ان يتكرموا عليّ بانتقاداتهم وملاحظاتهم ونصائحهم مهما كانت لكي استعين بها في تنقيح الطبعة الثانية ان شاء الله كاتبه

منصور جرداق

الشوير في ٢١ آب سنة ١٩٢٥

وقع كثير من الاغلاط المطبعية بالنسبة للظروف التي جرى فيها طبع الكتاب. وهي مدونة في جدول خاص فالرجاء من الاستاذ ان يطلب من التلامذة اصلاحها لاتمام الفائدة وتسهيل العمل

الفصل الاول

الرموز : القوانين الرمزية : الاعمال

القسم الاول

١ . تمهيد . التلامذة الذين درسوا الحساب الحديث عرفوا شيئاً عن مباحث الجبر وما تشتمل عليه وعلموا اهميتها في فهم وادراك القوانين الرمزية والرسوم البيانية والمعادلات واستعمال الكميات السلبية واستخدام هذه الامور وتطبيقها على القياسات المختلفة وحلّ الاعمال الحسابية . فقد تعلموا مثلاً في الحساب ان العبارة "٥ زيد عليها ٧" تكتب باكثر اختصار هكذا "٥ + ٧" اي ان العلامة + اختصار "زيد عليها" او "جُمع" او "ضمّ اليها"

وكذلك القاعدة لاستخراج الفائدة البسيطة "ان تضرب الاصل في الاجل ثم تضرب حاصلها في المعدل وتقسم الحاصل الاخير على مئة" فانه يمكن كتابتها باكثر اختصار هكذا : ف = $\frac{\text{ص} \times \text{ج} \times \text{م}}{١٠٠}$

هل يمكنك ان تذكر مثالاً او اكثر من هذا النوع حيث تستخدم الرموز للاختصار بدلاً من الكلام؟

٢ . غاية الجبر . اننا ندرس الجبر حبًا للاختصار وتوفير الوقت وتسهيل العمل باستخدام الرموز للحصول على نتائج عامة يصعب الحصول عليها في علم الحساب ومع ان مباحث الجبر عديدة وجديدة على الطالب لكنه يجدها مبنية على ما

درسة في علم الحساب ويشعر انها مرتكزة عليها جارية مجراها

٣. القانون الرمزي . هو عبارة جبرية نظير ف = $\frac{ص \times ج \times ع}{١٠٠}$ فهو اذًا اختصار القاعدة بواسطة الرموز

والقوانين الرمزية تمثّل وتظهر اهم فوائد علم الجبر لانها تستخدَم في الغالب للدلالة على القواعد الحسابية التي نحتاج اليها في العلوم الطبيعية والاعمال التجارية ونعثر عليها في الكتب والمجلات التي تبحث في الاعمال الميكانيكية والهندسية والبناء وفن الطيران والامور الاقتصادية والاحصاءات

ولكي نظهر جليًا ان القانون الرمزي اختصار لقاعدة عامة فاننا نبسط ذلك مطولاً في القضية الآتية :

جميعنا نعلم ان "مساحة المستطيل القائم الزوايا تساوي حاصل وحدات الطول في وحدات العرض"

وبعضهم يختصرها بقوله "مساحة القائم الزوايا تساوي الطول في العرض"

وغيرهم يختصرها اكثر فيقول

المساحة = الطول × العرض

وبوسعنا ان نختصرها اكثر اذا عوضنا عن الكلمات السابقة باحرفها الاولية فنقول :

م = ط × ع او ط . ع او طع

٤. الدلالة على الضرب في الجبر . نستدل من المثال السابق انه اذا كان الحرفان طوع يدلان على الاعداد او الكميات فحاصل ضربهما يعبّر عنه

ب ط X ع او ط . ع او ط ع اي انه يدل على الضرب اما بعلامته المشهورة "X" او بنقطة تكتب بين الحرفين او بعدم استخدام علامة ما بين المضروب والمضروب فيه وهذا يعني اننا نتبع الحرف الثاني بالاول بدون فاصل ما

تمرين

اجب ما استطعت شفاهًا

(١) ما هو الرمز او العلامة التي تقوم مقام "مطروحٌ منه" ؟ استخدم ذلك في كتابة "؟ مطروحٌ منها ٥" ثم اقرأها باكثر اختصار

(٢) ما هو الرمز او العلامة التي تقوم مقام "مقسوم على" ؟ استخدم ذلك في كتابة ١٥ مقسومة على ٣" ثم اقرأها باكثر اختصار

(٣) اكتب قائمة جميع الرموز والعلامات التي استخدمتها في علم الحساب للدلالة على الكلمات التي تقوم مقامها واكتب مقابل كلٍّ منها الكلمة او الكلمات التي تدل عليها

استخدم الرموز واكتب باخصر طريقة ما يأتي :

(٤) تسعة مع اربعة
(٥) ٧ مع ٨
(٦) ل زيد عليها ٦
(٧) ب مع ت
(٨) ٩ الا ٤
(٩) ل الا ٤
(١٠) ل الا م
(١١) ٤ في م
(١٢) ل في م
(١٣) ٤ في ل في م
(١٤) حاصل ضرب ب و ت
(١٥) ١٢ مقسومة على ٤

(١٦) ك مقسومة على ى (١٧) خارج قسمة ب على ت

(١٨) م تساوي حاصل ط و ع

(١٩) ف تساوي حاصل ص و ج و م

(٢٠) ك مقسومة على حاصل ب و ت

اقرأ ما يأتي

(٢١) ٨ + ٤ (٢٢) ٨ + م (٢٣) ل + م

(٢٤) م – ل (٢٥) م + ل (٢٦) ٩ م

(٢٧) ل م (٢٨) $\frac{\text{ب ت}}{\text{ر}}$ (٢٩) ص ج م

(٣٠) ٣ م + ٥ ب ت (٣١) م + ك – ى

(٣٢) ٢ ب + ٣ ب ت (٣٣) $\sqrt{\text{ب ت}}$

جد قيمة ما يأتي اذا كانت ب = ١، ت = ٢، ث = ٣، ح = ٤، د = ٦:

(٣٤) ٧ + ب (٣٥) ب + ت (٣٦) د – ب

(٣٧) ٣ د (٣٨) $\frac{1}{2}$ د (٣٩) $\frac{1}{2}$ ت د

(٤٠) $\frac{\text{ت ث}}{\text{ح}}$ (٤١) ٥ ب ت (٤٢) ب ت د

(٤٣) $\frac{\text{ح} + \text{د}}{\text{ث}}$ (٤٤) ٢ ب + ٣ ب ت (٤٥) ٥ ح – د

(٤٦) $\frac{٢\text{ح} + \text{د}}{\text{ث}}$ (٤٧) $\frac{٣\text{د} - ٤\text{ث}}{٢\text{ث}}$ (٤٨) $\sqrt{\text{ح}}$

(٤٩) $\sqrt{\text{ث ث د}}$

(٥٠) جد مساحة مستطيل طوله ٩ قراريط وعرضه ٨

جد مساحة المستطيلات الآتية اذا كانت ابعادها :

(٥١) ١٠ اقدام و٩ اقدام (٥٢) ٥ يردات و٣٠ يردًا

(٥٣) ٨ امتار و٧ امتار

(٥٤) جد قيمة ط ع اذا كانت ط = ٣٠ و ع = ١٠

(٥٥) جد قيمة ب ت اذا كانت ب = ٣٠ و ت = ١٠

(٥٦) جد قيمة ط ع اذا كانت ط = ٨٫٥ و ع = ٦

(٥٧) جد قيمة ص م اذا كانت ص = ٤٠٠ ليرة و م = ٨٠٪

(٥٨) اذا كانت ك = ٩ فكم قيمة ٣ ك ؟

استخدم القانون م = ط ع وجد قيمة م في الاسئلة الآتية :

(٥٩) ط = ٧٠ و ع = ٥ (٦٠) ط = ١٢ و ع = ٣ ١/٤

(٦١) ط = ٢ ٢/٣ و ع = ١ ١/٢ (٦٢) ط = ١٧٫٥ و ع = ١٤٫٣

(٦٣) ط = ٩ و ع = ٧٫٥ (٦٤) ط = ١٠٪ و ع = ٨٥

(٦٥) فوّاد معهُ ك كلة وجورج معهُ ثلاثة اضعاف كلل فوّاد فكم عدد كلل جورج ؟ كم عدد كلل فوّاد وجورج معًا ؟

٥ . استخراج قيمة القانون . اذا عرفنا قيمة ط و ع كما في الاسئلة السابقة فانهُ يمكننا استخراج او استعلام قيمة م وعندها نقول اننا قد استخرجنا قيمة القانون

فاذًا الاستعلام قيمة قانون ما :

(١) عوّض عن الاحرف بقيمتها العددية

(٢) ابسط النتيجة وضعها في اخصر شكل

مثالة اذا كانت ص = ٦٠٠ ليرة وج = ٥ سنوات وم = ١٠ ٪ فما قيمة الفائدون

ف = $\frac{\text{ص ج م}}{١٠٠}$

عوّض عن ص وم وج بقيمتها المذكورة في السؤال

فينتج ف = ٦٠٠ × ٥ × $\frac{١٠}{١٠٠}$ = ٣٠٠ بعد الاختزال والبسط

تمرين

جد قيمة الفوائد* في ما يأتي :

(١) م = $\frac{١}{٢}$ ق ع اذا كانت ق = ٧ وع = ٦

اذا كانت ق = ٥ وع = ٢$\frac{١}{٢}$ اذا كانت ق = ٩ وع = ٣$\frac{٧}{٩}$

اذا كانت ق = ٢$\frac{٤}{٥}$ وع = ٣$\frac{٨}{٥}$ اذا كانت ق = ٨ وع = ٤$\frac{١}{٤}$

(٢) م = $\frac{٢٢}{٧}$ ق اذا كانت ق = ٧ اذا كانت ق = ٢١

اذا كانت ق = ٣٥ اذا كانت ق = ٦$\frac{٣}{٤}$

(٣) م = $\frac{٢٢}{٧}$ ن٠ن اذا كانت ن = $\frac{٧}{٢}$ اذا كانت ن = ١٤

اذا كانت ن = ٩$\frac{٤}{٥}$ اذا كانت ن = ٢$\frac{٣}{٤}$ اذا كانت ن = ٧٠

(٤) م = ٤ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ن^{٢} اذا كانت ن = ١ اذا كانت ن = ٧

اذا كانت ن = ٢١ اذا كانت ن = ٤٥ اذا كانت ن = ٤$\frac{٣}{٤}$

٦. المقابلة بين الجبر والحساب. اذا قابلنا بين القوانين الرمزية

---

* ليس المقصود في هذا المقام معرفة دلالة القانون او القاعدة التي يقوم مقامها. فالرجاء من المعلم اذا ان لا يشدد على الطلبة معرفتها وبيان ما تدل عليه مع ان بعضهم قد يدرك ذلك لانه درسه اصلاً

التي نستخدمها في علم الجبر والقواعد الحسابية المقابلة لها فانهُ يمكننا ان نتصور ميزة وافضلية علم الجبر على علم الحساب

الحساب	الجبر
اذا كان ثمن قلم الرصاص ٥ غروش	اذا كان ثمن قلم الرصاص غ غرشاً
فثمن ٩ اقلام ٩ × ٥ غروش	فثمن ق اقلام ق غ غرشاً
ثمن اي عدد كان من اقلام الرصاص	اذا فرضنا ث ثمن اقلام الرصاص فَ
يعدل ثمن القلم الواحد مضروباً	ث = ق غ (دائماً وابداً)
في عدة آحاد الاقلام المطلوب معرفة ثمنها	
باخرة تقطع ٢٢ ميلاً في الساعة	باخرة تقطع م ميلاً في الساعة
ففي ٥ ساعات تقطع ٥ × ٢٢ ميلاً	ففي س ساعات تقطع م س ميلاً
المسافة التي تقطعها الباخرة في اي عدد	اذا فرضنا ف جميع المسافة التي تقطعها فـ
كان من الساعات تعدل الحاصل من	
ضرب ما تقطعهُ من الاميال في ساعة	ف = م س (دائماً وابداً)
واحدة في عدة آحاد الساعات	

٧. الاختزال الجبري . اذا دققنا النظر في المقابلة المارّ ذكرها ظهر لنا ان القانون الجبري اخصر بكثير من القاعدة الحسابية وتعميمهُ اكثر جلاءً ووضوحاً . فيمكننا القول ان الجبر وبالاحرى بعض مباحثهِ طريقة لاختزال كتابة القواعد الرياضية

ونحن نكتب القانون الرمزي باستخدام اول احرف الكلمات التي يحوم البحث

حولها اوابة احرف غيرها نعتقدها مناسبة للمقام

تمرين

اكتب القاعدة الحسابية العامة لكل من القضايا الآتية ثم عبّر عنها بالقانون الرمزي كما مرّ بك

(١) مساحة المستطيل القائم الزوايا .....

(٢) مساحة ٣ مستطيلات متساوية .....

(٣) الثمن (ث) لاي عدد كان (ع) من اذرع قماش الحرير اذا كان ثمن الذراع غ غرشًا .....

تنبيه : استخدم الاحرف ث وع وغ في القانون الجبري فقط واتبع ذلك في نمر ٤ و٥ و٦

(٤) ثمن ذراع الجوخ (ث) اذا كان ثمن (ع) اذرع مبلغ (م) ليرة

(٥) الثمن (ث) لعدد (ع) معين من امتار الشريط اذا كان ثمن المتر فرنكًا

(٦) ثمن كرسي (ث) اذا كان ثمن عدد (ع) معين منها مبلغ م ليرات

(٧) عدد من السنين محوّل الى اشهر

(٨) عدد من الاشهر والايام محوّل الى ايام

تنبيه : ضع ي لليوم وش للشهر وع لعدد الايام المطلوب واجعل الشهر ٣٠ يومًا

(٩) عدد من السنين والاشهر محوّل الى اشهر

(١٠) عدد من السنين والاشهر محوّل الى سنين وكسر السنة

(١١) عدد من الاذرع محوّل الى قراريط

(١٢) عدد من الدردات محوّل الى قراريط

(١٣) عدد من الامتار محوّل الى سنتيمترات

(١٤) اجرة تلغراف مؤلف من (ك) كلمات اذا كانت اجرة الكلمة غ

٨ . التعبير عن الاختزالات الجبرية . يجب ان لا ينقصر درسنا على تعلم كتابة القواعد الاعتيادية بطريقة الاختزال الجبري اي القانون الرمزي بل يجب ان نتعلم كيف نترجم او نعبّر عن القانون المذكور بشكل قاعدة عامة باللغة المتعارفة

ففي التعبير ب ت − ج + د ← س تتم عمليات الضرب والقسمة اولاً وبعدئذ نجري عمليات الجمع والطرح

تمرين

عبّر عن القوانين الآتية بقواعد حسابية :

(١) ث = ع غ . ث ثمن عدة ادوات عددها ع وغ ثمن الوحدة

(٢) ع = ث ÷ غ الاحرف كما في نومرو (١)

(٣) ك = ع + س م حيث ع عدد سكان مدينة في الوقت الحاضر م معدل زيادة السكان السنوية وك سكان المدينة بعد مضي س سنة

(٤) م = س ش . حيث سرعة رجل يسير شرقاً ش ميلاً في الساعة وس عدد الساعات وم المسافة التي يقطعها

(٥) م = س غ حيث سرعة رجل يسير غرباً غ ميلاً في الساعة وس وم كما في السؤال السابق

(٦) م = س ش + س غ . حيث س وش وغ كما في السؤالين السابقين

وم المسافة بين الرجلين بعد أن يسيرا س ساعة من ذات المكان وفي نفس الوقت
بين برسم بسيط المقصود من السؤال وعيّن نقطة بداءة المسير وموقف الرجلين في نهاية الوقت المعين

تمرين

مسائل منثورة

(١) اذا كان جانب مربع ٥ امتار فكم مساحته ؟ كم محيطه ؟

(٢) اذا كان جانب مربع م مترًا فكم مساحته ؟ كم محيطه ؟

(٣) قاعدة مستطيل ١٢ قدمًا وارتفاعه ٦ اقدام فكم مساحته ؟ كم محيطه ؟

(٤) قاعدة مستطيل ق قدمًا وارتفاعه ع قدمًا فما مساحته ؟ ما محيطه ؟

(٥) طول مستطيل ضعف عرضه فاذا كان عرضه ع ذراعًا كم يكون طوله ؟ كم يكون محيطه ؟ كم تكون مساحته ؟

(٦) عمر يوسف ثلاثة اضعاف عمر ابنه توفيق فاذا كان عمر توفيق ك سنة كم يكون عمر الاب ؟

(٧) يوسف اكبر من ابنه توفيق بـ ٣٠ سنة فاذا كان عمر توفيق ك سنة ماذا يكون عمر الاب ؟

(٨) طول مستطيل اكثر من عرضه بـ ٣٠ قدمًا فاذا كان العرض ك قدمًا كم يكون الطول ؟ كم يكون المحيط ؟ كم تكون المساحة ؟

(٩) عرض مستطيل اقصر من طوله بـ ١٠ امتار فاذا كان العرض ك

مترًا كم يكون الطول؟ كم يكون المحيط؟ كم تكون المساحة؟

(١٠) مجموع عددين ١٦٠ واحدهما ك فما هو الآخر؟

(١١) الفرق بين عددين ٣٠ والاصغر منهما ك فما هو الاكبر؟

(١٢) ما مجموع العددين ك وى؟ ما الفرق بينهما؟ ما هو حاصلها؟

(١٣) كم تزيد ١٣٩ عن ٧٩؟ (١٤) كم تزيد ك عن ٧٩؟

(١٥) كم تنقص ٣٧ عن ٣٥٣؟ (١٦) كم تنقص ك عن ٣٥٣؟

(١٧) اذا كانت ك عددًا ما فما العدد الذي يليها؟ جواب ك + ١

(١٨) اذا كانت ك عددًا ما فما هو العدد الذي يسبقها؟

٩. كيفية تحليل الاعمال وبسطها . وهذا نبسطه بالامثلة الآتية :

(١) سلمى اشتغلت عددًا معيّنًا من الزهرات ولكن نجلا اشتغلت ٣ اضعاف ذلك فاذا كان مجموع ما اشتغلتاهُ ٨٠ زهرة كم زهرة اشتغلت كلٌ منهما؟

الاعداد التي نبحث فيها	الرموز التي تقوم مقام الاعداد
عدد الزهرات التي اشتغلتها سلمى =	ك
" " " " نجلا =	٣ك
" " " اشتغلتاها معًا =	٨٠

المساواة التي نجدها بين هذه الاعداد

مجموع العددين الاولين = العدد الاخير

(٢) يملك اميل وفائق ١٢٠ كلة . ولكن كلل اميل ضعفا كلل فائق فكم كلة مع كلٍ منهما؟

الاعداد التي تدخل في البحث		الرموز التي تقوم مقام الاعداد
عدد كل اميل وفائق	=	١٢٠
عدد كل اميل	=	٢ ك
عدد كل فائق	=	ك

المساواة التي تربط هذه الاعداد

مجموع العددين الاخيرين = العدد الاول

(١) مال توفيق وانيس ٤٦٠ ليرة فاذا كان مال توفيق ٤/١ مال انيس كم يكون مال كل منهما ؟

الاعداد التي تدخل في البحث		الرموز التي تمثل الاعداد
عدد ليرات توفيق وانيس	=	٤٦٠
عدد ليرات توفيق	=	٤/١ ل
عدد ليرات انيس	=	ل

المساواة التي تربط هذه الاعداد

مجموع العددين الاخيرين = العدد الاول

تنبيه : الاساتذة متفقون على ان المسائل الخطية التي يلزمها قوة عقلية وادراك سام هي اصعب الامور في الابحاث الجبرية . واعتقاد الكثيرين منهم ان الاسلوب الذي اتبعناه في تحليلها انسب واسطة لفهمها وادراكها وتذليل صعوبتها وعليه فالرجاء من اخواني الاساتذة ان يبسطوا الامثلة جهدهم للطلبة ويشددوا عليهم ليفهموها ويمرنوا عليها طويلا حتى يصبح الاسلوب ملكة راسخة فيهم ولو اقتضى لذلك زمن طويل

تمرين

حلّل الاعمال الآتية كما جربنا في الامثلة المشروحة واحفظها في دفترك لحين الحاجة اليها في المستقبل

(١) اصطاد يوسف واحمد ٣٦ سمكة . وكان عدد ما اصطادهُ يوسف ضعفي العدد الذي اصطادهُ احمد فكم سمكة اصطاد كلٌّ منهما ؟

(٢) مجموع عددين ١٦٠ واكبرهما ٤ اضعاف الاصغر فما العددان ؟

(٣) جمعت لطيفة ووالدتها ٤٨ مد زيتون في صحراء الشويفات . فاذا كان ما جمعتهُ الوالدة ٣ اضعاف ما جمعتهُ لطيفة فكم مدًّا جمعت كلٌّ منهما ؟

(٤) اذا جمعت عددًا ما الى خمسة اضعافهِ كان المجموع ٢١٦ فما هو العدد ؟

(٥) مجموع عددين ٧٢ واصغرهما ⅓ الاكبر فما العددان ؟

(٦) رجل ترك ١٢٠٠٠ ليرة لابنهِ وابنتهِ وكانت حصة الابن ضعفي حصة الابنة فكم نال كلٌّ منهما ؟

(٧) ربح رجل وولدهُ ١٢٨٨٠ ليرة فاذا كانت حصة الوالد ضعفي حصة الابن كم كانت ارباح كلٍّ منهما ؟

(٨) جمع ولدان ١٥٠ جوزة فاذا كان نصيب الاكبر ضعفي نصيب الاصغر كم كانت حصة كلٍّ منهما ؟

(٩) اجرة خياطة ومعاونتها في الاسبوع ١٨٦٠ غرشًا فاذا كانت اجرة الخياطة ضعفي اجرة المعاونة كم تأخذ كلٌّ منهما ؟

(١٠) بلغ محصول القطن احد السنين في العالم ١٦,٠٠٠,٠٠٠ بالة وكان محصوله في الولايات المتحدة ثلاثة اضعاف محصولو في سائر العالم فكم بالة نتجت في الولايات المتحدة ؟

(١١) بلغت غلة حقل في البقاع ٦٠٠٠ ليرة فاذا كانت حصة الشريك وعائلتو ضعفي حصة صاحب الحقل كم نال كلٌّ منهما ؟

(١٢) مجموع عددين ٤٨٠ واحدهما خمسة اضعاف الآخر فما العددان ؟

(١٣) مجموع عددين ٧٣٦ واحدهما ثلاثة اضعاف الآخر فما العددان ؟

(١٤) اقسم ٦٤ الى قسمين بحيث يكون احدهما ٧ اضعاف الآخر

(١٥) مجموع ثلاثة اعداد ١٠٥ الاول ضعف الثالث والثاني ٤ اضعاف الثالث فما هي الاعداد ؟

(١٦) مجموع ثلاثة اعداد ١١٧ الثاني ٥ اضعاف الاول والثالث ٦ اضعاف الثاني فما هي الاعداد ؟

(١٧) مجموع ثلاثة اعداد ٤٢٤ الثاني ٥ اضعاف الاول والثالث ٦ اضعاف الثاني فما هي الاعداد ؟

(١٨) مجموع ثلاثة اعداد ١٠٤ الثاني ٣ اضعاف الاول والثالث يساوي مجموع الاول والثاني فما هي الاعداد ؟

(١٩) محيط مربع ٣٦٠ قدماً فكم طول جانبو ؟

(٢٠) محيط مستطيل ٢٥٦ متراً فاذا كان طولهُ ٣ اضعاف عرضهِ كم يكون طولهُ وعرضهُ ؟

(٢١) وفّر رجل ٦٠٠٠ ليرة في ٣ سنوات فاذا وفّر في السنة الثانية ضعف ما

وفّرهُ في الاولى وفي الثالثة ٣ اضعاف ما وفّرهُ في الاولى فكم المبلغ الذي وفّرهُ كل سنة ؟

١٠ . حلّ الاعمال واستخراج اجوبتها . وهذا نمثّل بحلّ الاسئلة التي حللناها وبسطناها في نومرو ٩ واننا نكرر نشرها هنا لاهمية الاسلوب والطريقة ولزيادة الفائدة

(١) سلمى اشتغلت عددًا معينًا من الزهرات ولكن نجلا اشتغلت ٣ اضعاف ذلك فاذا كان مجموع ما اشتغلتاهُ ٨٠ زهرة كم زهرة اشتغلت كلٌّ منهما ؟

الاعداد التي تدخل في البحث		الرموز التي نستخدمها بدلاً من الاعداد
عدد الزهرات التي اشتغلتها سلمى	=	ك
" " " " نجلا	=	٣ك
" " " اشتغلتاها معًا	=	٨٠

المساواة التي تربط هذه الاعداد

مجموع العددين الاولين = العدد الاخير

وباستخدام الرموز : ك + ٣ك = ٨٠

اي ٤ك = ٨٠

فاذًا ك = ٢٠ عدد الزهرات التي اشتغلتها سلمى

٣ك = ٦٠ عدد الزهرات التي اشتغلتها نجلا

الامتحان : ٦٠ = ٣ اضعاف ٢٠ وكذلك ٦٠ + ٢٠ = ٨٠

---

(٢) يملك اميل وفائق ١٤٠ كلة ولكن كلل اميل ضعف كلل فائق فكم كلة مع كلٍّ منهما ؟

الاعداد التي تدخل في البحث		الرموز التي تقوم مقام الاعداد
عدد كل اميل وفائق	=	١٢٠
" " "	=	٢ك
" " فائق	=	ك

المساواة التي تربط هذه الاعداد

مجموع العددين الاخيرين = العدد الاول

وباستخدام الرموز : ٢ك + ك = ١٢٠

اي ٣ك = ١٢٠

فاذًا ك = ٤٠ عدد كل فائق

٢ك = ٨٠ " " اميل

الامتحان : ٨٠ = ضعف ٤٠ . وكذلك ٨٠ + ٤٠ = ١٢٠

تمرين

اجب ما استطعت شفاهًا

حلّل وابسط الاعمال في التمرين السابق ثم حلها

حلّل وابسط ثم حلّ الاسئلة الآتية

(١) رجل اعطى ولدهُ ٦٦ ليرة ليشتري بها طاقًا وبالطو وبرنيطة فاذا كان ثمن البالطو ضعف ثمن البرنيطة . والطاقم ٢ اضعاف البرنيطة . كم يكون ثمن كلٍّ منها؟

(٣) رجل وهب ابنهُ ضعف ما وهب ابنتهُ ووهب زوجتهُ ٤ اضعاف ما وهب الابنة فاذا كانت تركتهُ ٤٢٠٠٠ ليرة كم ينال كلٌّ منهم ؟

(٤) يتركب السمنت من الرمل والحصى والترابة الافرنجية بحيث يكون الرمل ضعف الترابة . والحصى ٥ اضعافها . فما مقدار كل منها في ١٢٠٠ ذراع مكعبة من السمنت ؟

(٤) يصنع نوع من الزجاج بمزج واذابة جزء من الكلس و٥ اضعافهِ من القلي و٣ اضعاف القلي رملاً فكم مقدار كلٍّ منها في ١٢٠٠ كيلو زجاج ؟

(٥) سافر رجل وزوجتهُ وولدها وعمرهُ ٨ سنوات في الباخرة من بيروت الى نيويورك باجرة ٩٠٠ ريال فكم تكون اجرة الراكب ؟

(٦) اقسم ٤٨٠ الى ٣ اعداد ليكون الثاني ضعف الاول والثالث ثلاثة اضعافهِ (اضعاف الاول)

(٧) مجموع ثلاثة اعداد ٦٠٠ . الثاني ضعف الاول والثالث ٣ اضعاف الثاني . فما هي الاعداد ؟

(٨) مجموع عددين ١٧٦٠ واحدها ١٠/١ الآخر فما العددان ؟

(٩) ما العدد الذي اذا جمعت ٧٠ الى ٩ اضعافهِ كانت النتيجة ١٠٦٠ ؟

(١٠) الفرق بين عددين ١٥٤٠ واحدها ١٠ اضعاف الآخر فما العددان ؟

١١ . المقدار الجبري . ويقال له العبارة الجبرية هو ما تألف من رمز واحد او مجموع رموز تمثل الاعداد وتقوم مقامها

مثاله ك و ٤ ل^{٢} و ل^{٢} − ٣م + ٢ ن

١٢ . الحدّ . حبا لتسهيل العمل وبسطهِ بكل جلاء فاننا ننظر الى العلامتين

"+" و"–" ونحسبها ما يفرق حدًّا عن آخر فالحد اذًا مقدار او عبارة ليس بين اقسامها + او – مثلاً ٤ك و٣م ل و٨ك٢م

ونحسب المقدار ٥ ب + ٣ ت – ٢ س مؤلفًا من الحدود ٥ ب و٣ ت و٢ س

١٣ . المسمّى . ولاجل سهولة العمل والبحث فاننا نخصص احد اقسام الحد او اضلاعه ونفرزهُ لنتم العمل عليهِ فندعوهُ حينئذٍ مسمًّى مثل ٥ في ٥ ك التي تدل كم مرة جمعت الكمية الحرفية (ك) الى نفسها

فالمسمّى اذًا هو الضلع العددي لاي كمية حرفية

تنبيه : اذا كان المسمى واحدًا فانهُ لا يكتب بل يقدَّر تقديرًا فاننا لا نكتب مثلاً ١ ل بل نكتب ل فقط

١٤ . الدليل . هو رقم صغير يوضع فوق الكمية قليلاً مع ميل الى اليسار منها فيدل على عدة تكرارها كضلع

مثالهُ ل٥ = ل × ل × ل × ل × ل

تمرين

اجب ما استطعت شفاهًا

بيّن كم حدًّا في المقادير الآتية واقرأها حدًّا حدًّا

(١) ٥ ب + ٢ ت (٢) ٣ك – ٧ى + ٥م

(٣) ٣ ب ت + ٥ ب س – ك + ٢ى (٤) ٣م ن – ٣ك ى٢ + ٥ل

(٥) اكتب مقدارًا مؤلفًا من حدين واستخدم اعدادًا مع الاحرف ب وت وك وى

(٦) ما مسميات الحدود الآتية : ٦ ب ، ٠ اى ، ٩ ك ى ؟

(٧) اقرأ ٥ ، ماذا تسمي ٢ ؟ على ماذا تدل ؟

(٨) اقرأ م ، ماذا تسمي ٥ ؟ على ماذا تدل ؟

(٩) اقرأ ٧ ك ، م . كم مرة تتكرر ك كضلع ؟ كم مرة تتكرر م ؟

استخدم الدليل لتكتب ما يأتي باخصر طريقة :

(١٠) ل ل ل ل ل (١١) ٢ . ٢ . ٢ . ٢ . ٢ . ٢

(١٢) ٥ ب ب ب ت ت ت ث (١٣) ٢ س س ٢ ٢ ٢ ٢ ٢

(١٤) ٧ ب ب ب + ك ك ل ل ل (١٥) ٢ ٢ م ل ل - ٤ م ل ل ل

(١٦) ٩ ٢ ٢ ٢ ٢ م ل ل ل ى ى ى

(١٧) ٥ ب ب ب ح ح - ٢ ب ب ح ح ح

اذا كانت م = ١ و ب = ٢ و س = ٣ و ك = ٤ فاقرأ ما يأتي وجد قيمته :

(١٨) س ٢	(١٩) ٢ س	(٢٠) ك ٢
(٢١) ٣ ك	(٢٢) ٥ س ٢	(٢٣) م ٣
(٢٤) ب ٢ س ٢	(٢٥) ٣ م ك ٢	(٢٦) ب ٢ + م
(٢٧) س ٢ - ب ٢	(٢٨) ١٨ - ك ٢	(٢٩) ٤ م س ٢ + ك
(٣٠) ٣ ك ٢ - ٤ م	(٣١) س ٢ - ١	(٣٢) ب س م - ك
(٣٣) ك ٢ - ٤ ب س م	(٣٤) $\frac{ك^{٢}}{ب س}$	(٣٥) $\frac{ب^{٢}}{٣ م س}$
(٣٦) $\frac{ب^{٢}}{٣ م + س^{٢}}$	(٣٧) $\frac{٣ + ب}{٣ س ٢ - س ٢}$	

استخدم الرموز للتعبير عما يأتي :

(٣٨) ك مع ٣ . مجموع ك و ٣ . العدد الذي هو اكثر من ك ب ٣ .

العدد الذي يزيد على ك ب ٢

(٣٩) ل الأ ٥ . ك سلب ٥ . ك ناقص ٥ . العدد الذي ينقص عن ك ب ٥

(٤٠) مضاعف ك مع ثلاثة اضعاف م

(٤١) حاصل مجموع ٦ و٧ في ل (٤٢) ثلث مجموع م ول

(٤٣) مجموع ٣ اضعاف ب و٥ اضعاف ح

(٤٤) زيادة ٥ اضعاف أب على ٣ اضعاف م

(٤٥) مربع ك مطروح من مربع ل

(٤٦) خارج قسمة ك على ل (٤٧) حاصل ضرب ك في مجموع ل وم

(٤٨) جورج معهُ ك كلة وربح ١٠ فوقها . فكم جملة ما معهُ ؟

(٤٩) جورج معهُ ك كلة وربح ل كلة فوقها . فكم جملة ما معهُ ؟

(٥٠) فؤاد معهُ غ غرشاً واعطاهُ والدهُ ٢٠ غرشاً . فكم غرشاً معهُ الآن ؟

(٥١) فؤاد معهُ غ غرشاً واعطاهُ والدهُ ل غرشاً فكم جملة ما معهُ ؟

(٥٢) كل فؤاد ضعف كل سامي (ك) وزيادة ٥ كل فكم عددهما ؟

(٥٣) عمر سلمى الآن س سنة فكم يكون عمرها بعد مضي ٣ سنوات ؟ ٥ سنوات ؟ ك سنة ؟

(٥٤) اي عدد اكثر من ٥ بواحد ؟ اكثر من ك بواحد ؟ اكثر من ع بواحد ؟ من ك + ١ (بواحد) ؟ من ك + ٢ ؟ من ع – ١ ؟ من ك – ٢ ؟

الاعداد المتوالية او المتتابعة هي الاعداد التي يكون الفرق بينها واحداً مثل ٥ و٦ ومثل ١٠٠٠ و٩٩٩

(٥٥) ما هما العددان المتتابعان اذا كان اقلهما "ك" ؟ اكتب ٣ اعداد متتابعة اقلها ك . اربعة اعداد . خمسة اعداد

(٥٦) الفرق بين عددين ٤ واصغرهما ك فما هو الاكبر ؟

(٥٧) ثلاثة اعداد اصغرها ك فاذا كان الثاني يزيدُ بـ ٧ والثالث بـ ١١ ما هو الثاني والثالث ؟

(٥٨) ثلاثة اعداد اصغرها ك والثاني يزيدُ بـ ٦ والثالث يزيد الثاني بـ ٨ فما هو الثاني والثالث ؟

(٥٩) ما مربع مجموع ك وى مع مربع فرقهما ؟

١٥ . حلّ الاعمال

(١) مدرسة فيها ٣١٦ ولدًا فاذا كان عدد البنات يزيد على عدد الصبيان بـ ١٦ كم بنتًا وكم صبيًا في المدرسة ؟

الاعداد التي نبحث فيها		الرموز التي تقوم مقام الاعداد
عدد الطلبة في المدرسة	=	٣١٦
عدد البنات	=	ك + ١٦
عدد الصبيان	=	ك

المساواة التي تربط هذه الاعداد

مجموع العددين الاخيرين = العدد الاول

او باستخدام الرموز ك + ك + ١٦ = ٤١٦

اي ٢ك + ١٦ = ٤١٦

وبطرح ١٦ من الجانبين المتساويين ١٦ = ١٦

٢ك = ٤٠٠

ك = ١٥٠ عدد الصبيان

ك + ١٦ = ١٦٦ عدد البنات

الامتحان : ١٦٦ تزيد على ١٥٠ بـ ١٦ . وكذلك ١٦٦ + ١٥٠ = ٤١٦ فالاعداد ١٦٦ و ١٥٠ تتم جميع شروط السؤال

(٣) اجرة توفيق وعادل وامين ٢٨ ليرة في الاسبوع وكانت اجرة توفيق تزيد اجرة عادل بـ ٥ ليرات واجرة امين تزيد اجرة عادل بليرتين فكم تكون اجرة كل منهم ؟

الاعداد التي نبحث فيها		الرموز التي تقوم مقام الاعداد
اجرة توفيق وعادل وامين	=	٢٨ ليرة
اجرة عادل	=	ك
اجرة توفيق	=	ك + ٥
اجرة امين	=	ك + ٢

المساواة التي تربط هذه الاعداد

مجموع الثلاثة الاعداد الاخيرة = العدد الاول

او باستخدام الرموز ك + ك + ٥ + ك + ٢ = ٢٨

اي ٣ ك + ٧ = ٢٨

وبطرح ٧ من الجانبين المتساويين ٧ = ٧

٣ ك = ٢١

ك = ٧ اجرة عادل

ك + ٥ = ١٢ اجرة توفيق

ك + ٢ = ٩ اجرة امين

(ليمتحن الطالب العمل)

وبهذه المناسبة نكرر الالتماس من الاستاذ ان يشدد على الطالب ليتبع هذه الطريقة ويتحدى الاسلوب الذي بسطناهُ ليصبح ملكة راسخة في عقلهِ فيسهل عليهِ العمل والدرس والتقدم فيملك ناصية اهم سرّ من اسرار النجاح في العلوم الرياضية التي تقوي فيهِ مزايا التفكير والقياس والتحليل والاستنتاج المنطقي

(١) دجاجات انيس اكثر من دجاجات يوسف بـ ١٦ ومجموع دجاجاتهما ٩٤ دجاجة فكم دجاجة عند كلٍّ منهما ؟

(٢) مجموع كلل جورج وفؤاد ١٢١٠ ولكن كلل جورج تزيد على كلل فؤاد بـ ٣٥٠ فكم كلة لجورج ولفؤاد ؟

(٣) ثلاث بنات خطنَ ٤٠ قطعة ثياب وقد خاطت الاولى ٥ قطع اكثر من الثالثة وخاطت الثانية ٨ قطع اكثر من الثالثة فكم قطعة خاطت كل منهنَّ ؟

(٤) وضع رجل ٤١٠٠ ليرة في ٣ مصارف . فاذا وضع في الثاني ٢٠٠ ليرة اكثر مما وضع في الاول ووضع في الثالث ٤٠٠ ليرة اكثر مما وضع في الثاني كم وضع في كلٍّ منها ؟

(٥) اقسم ٣٤٨٠ ليرة الى قسمين . بحيث يكون احدهما اكثر من الآخر بـ ٤٦٠

(٦) وديع واميل عندهما ٦٠ طائر حمام فكم حمامة لكل منهما اذا كانت حمامات وديع اكثر من حمامات اميل بـ ١٠ ؟

(٧) كان في احد انتخابات بيروت ١٢٧٨٤ صوتاً فاذا نال الفائز الاكثرية بـ ١٧٤٢ فكم صوتاً نال ؟

(٨) يكون الليل في مدينة نيويورك في ٢١ ك ١ اطول من النهار بـ ٥ ساعات و٢٢ دقيقة فكم يكون طول النهار ؟

(٩) مجموع عددين متتابعين ١٤١ فما العددان ؟

(١٠) مجموع ثلاثة اعداد متتابعة ٣٤٢ فما هي الاعداد ؟

(١١) اقسم ٥٠٠٠ ليرة بين سلمى وليلى ونبيهة بحيث تنال سلمى ٨٠٠ ليرة اكثر من نبيهة وليلى ٤٠٠ ليرة اكثر من نبيهة

(١٢) اقسم ٥٠٠٠ ليرة بين اديب وتوفيق وفارس بحيث ينال اديب ٤٠٠ ليرة اكثر من توفيق وفارس ٨٠٠ ليرة اكثر من اديب

(١٣) اربع بنات خطن ٤٨٧ قميصاً . الاولى خاطت قدر الثانية والثالثة ١٢ قميصاً اكثر من الاولى والرابعة ١٥ قميصاً اكثر من الثالثة فكم قميصاً خاطت كلٌّ منهنّ ؟

(١٤) ربح ٤ تلامذة من مدرسة "عاليه" ٤٠ نقطة يوم الالعاب وكان ما ربحه

الاول نقطة واحدة اكثر من الثاني والثالث ٣ نقط اكثر من الثاني والرابع نقطتين اكثر من الثاني فكم نقطة ربح كلٌّ منهم ؟

(١٥) مجموع علامات وديع وشفيق ومحمد ٢٦٣ في علم الجبر فاذا كان وديع يزيد محمد بـ ١٦ وشفيق يزيدهُ (يزيد محمداً) بـ ٧ كم تكون علامة كلٍّ منهم ؟

القسم الثاني

١٦. الجبر . فرع من العلوم الرياضية لدرس انفع الطرق وافعلها في استعمال الاعداد والكميات واستخدامها بواسطة الاحرف والرموز على اختلاف انواعها وهو كالحساب يُبحث فيهِ عن الكميات ولكن بطريقة اعمّ لان الكميات في العمليات والابحاث الحسابية يدل عليها بالارقام التي لها قيمة واحدة محدودة لا تتغير ابدًا . اما في الجبر فالكميات يدل عليها برموز تعطى لها اي قيمة كانت . وتلك الرموز هي حروف الهجاء ومع انهُ لا حدَّ ولا قيد للقيمة العددية التي تمثلها الرموز الاَّ ان قيمتها في العملية الواحدة او في نفس العملية تبقى واحدة ولا تتغير

مثلاً اذا قيل لنكن ب = ٥ فليس المراد ان ب = ٥ دائمًا بل انها تساوي ٥ في نفس العملية التي نحن بصددها فقط . وفضلاً عن ذلك يحق لنا ان نستعمل هذة الرموز بدون وضع قِيَم خاصة لها وهذا في الحقيقة من اهم مباحث علم الجبر

١٧. فائدة علم الجبر . والفوائد التي ظهرت لنا مما درسناهُ قبلاً باستعمال الرموز والحروف الهجائية للدلالة على الكميات هي

(١) تقصير الشغل وتسهيلهِ واختصارهِ اثناء حلّ الاعمال

(٢) تمكننا من حلّ اعمال ومسائل لا يمكن ان تحلّ الاّ بواسطتها وسوف يظهر لنا فوائد اخرى اثناء درسنا في المستقبل لا مجال لذكرها الآن

١٨ . **الحد** . هو مقدار جبري (او عبارة جبرية) ليس بين اقسامه "+" او "–" مثلاً ٥ ك٢ ى و٦ ك ل م٢ و٥ ب ت + م ح و٧ (ك + ى)

تنبيه : علامات الضرب والقسمة والحواصر تربط الكميات وتجعلها حدًّا واحدًا لانتباه ذكرناها في كتاب الحساب الحديث

١٩ . **العبارة الجبرية** . ويقال لها المقدار الجبري تتألف من اعداد وحروف تقوم مقام الاعداد وتنقسم الى قسمين **بسيطة ومركبة**

٣٠ . **العبارة البسيطة** . ويقال لها المقدار البسيط هي ما تركبت من حدّ واحد مثل ٥ ك٢ ل و ى

٣١ . **العبارة المركبة** . ويقال لها المقدار المركب هي ما تألفت من حدّين فاكثر مثل ٣ ب ت – ى + ٢ ك + ٥ ى٢

٣٢ . **العبارة ذات الحدّين** . هي ما تألفت من حدّين فقط مثل ٣ ب – ٢ س ويقال لها ثنائية

٣٣ . **العبارة ذات الثلاثة الحدود** . هي ما تألفت من ثلاثة حدود مثل ٥ ب – س + ك ويقال لها ثلاثية

واذا زادت العبارة على ثلاثة حدود قيل لها كثيرة الحدود وقد تسمّى العبارة البسيطة ذات حدٍّ واحد

٣٤ . **المسمّى** . يُدعى الضلع العددي لاي كمية حرفية مسمّى مثل ٥ في ٥ ل٢ و ١١ في ١١ ل م ن

اما المسمّى فهو ذلك العدد الذي يدلّنا كم مرة جمعت الكمية الحرفية الى نفسها وقد توسع البعض في تحديده فعرّفوهُ بقولهم : انهُ اذا وجد حاصل ضرب عدة اضلاع فمسمّى ضلع او اكثر منها هو حاصل باقي الاضلاع

ففي الحاصل ٥ ك ل م ن مسمّى ن هو ٥ ك ل م ومسمى ك ل هو ٥ ن م

في المثال السابق ما هو مسمّى ك٢ ل ن٢ ك م٢ ك ن٢

٣٥ . المسمى كما رأيت نوعان عددي وحرفي . فالعددي ما تركب من الارقام فقط والحرفي ما تركب من حروف ففي ١٥ ب ت المسمى العددي ١٥ وفي ب س ك٢ المسمّى الحرفي ل ك٢ هو ب س

٣٦ . الضلع . ضلع الحاصل ويقال له العامل هو احد الكميات التي ضربت بعضها في بعض لتكوين الحاصل

مثالهُ : ٥ ب ل ن معناهُ ٥ × ب × ل × ن فاذًا كلٌّ من ٥ وب ول ون هو ضلع الحاصل ٥ ب ل ن

٣٧ . القوة . هي حاصل ضرب كمية في نفسها مرة او مرتين او اكثر او تكرار تلك الكمية كضلع . مثالهُ ٧ × ٧ = ٧٢ اي ٧ مرقاة الى القوة الثانية و٥ × ٥ × ٥ = ٥٣ اي ٥ مرقاة الى الدرجة الثالثة و م م م م م = م٥ اي م مرقاة الى الدرجة الخامسة وهلمّ جرًّا

واستعمال الدليل اخصر طريقة للدلالة على القوة

٣٨ . الدليل . ويقال له الاس هو عدد او رقم صغير يكتب فوق الكمية مع ميل الى اليسار منها فيدل على مرّات تكرارها كضلع

مثالة : ك^{٣} = ك × ك × ك او ك ك ك لان الدليل ٣ يدل على ان ك مكررة ٣ مرات كضلع

ولكن اذا كان الدليل واحداً "١" فانهُ يهمل لفظاً وكتابة فلا نكتب ك^{١} ولا نقول ك دليل واحد بل نكتب ونقول ك فقط

٣٩. تتألف القوة من امرين (١) الاصل اي احد الاضلاع المتساوية و(٢) الدليل مثالة : في ك^{٣} الاصل ك والدليل ٣

٣٠. على الطالب ان يحذر من الخلط بين المعنى والدليل. ولبيان ذلك نسأل السؤال الآتي :

ما الفرق بين ٣ك و ك^{٣}؟

والجواب هو : ٣ك = ٣ × ك اي حاصل ضرب الكميتين ٣ وك احداهما في الاخرى اما ك^{٣} = ك ك ك اي حاصل ضرب الكميات ك وك وك بعضها في بعض اي القوة الثالثة للكمية ك

وهذا يظهر باكثر وضوح اذا جعلنا ك = ٥ فان ٣ك = ٣ × ٥ = ١٥ وتكون ك^{٣} = ٥^{٣} = ٥ × ٥ × ٥ = ١٢٥ فتأمل جيداً واحفظهُ

(١) بيّن المقادير ذات (ب) الحد الواحد (ت) الحدين (ث) الثلاثة الحدود (د) الكثيرة الحدود في ما يأتي : ٣ل + ٢ب ; ٦ب^{٢}ك ; ٣ل + ٥ (ك + ى) ; ٣ل + ٢ب – ٣س ; ٤ك^{٢} ; ٢ل + ٣ك + ٧ى + ٤ن ; ٦ (ل – ب) ; ك^{٢} + (ل + ب) ك + ل ب ; ٢ج ت^{٢}

(٢) ركّب مقادير ذات (ب) حدّين (ت) ثلاثة حدود (ث) مما هو كثير الحدود وذلك من الكميات الآتية : ٣ب^{٢} ; – ٢ب ل ; ٣ك^{٢}ى ; ٥ (ك + ى) ; ٤ب^{٢} ; ٣م ل ن

(٣) ما المسمّى العددي في ٥ ب ك ؟ ما المسمى الكامل ل ك ب ؟

(٤) ما نوع المسمّى ب ت س ل ك في ب ت س ك ؟

(٥) ركّب حدًّا واحدًا بوضع مسمى عددي للحرف ل . بوضع مسمى حرفي لـ ن . بوضع مسمى مختلط (أرقام وأحرف) ل ك

(٦) اكتب القوة التي اصلها ٧ ودليلها ٥ . اكتب القوة التي اصلها س ودليلها ٥

(٧) اكتب القوة التي اصلها ك ودليلها ع . اكتب القوة التي اصلها ى ودليلها ع − ١

اذا كانت ت = ½ و ب = ⅔ وس = ٤ وك = ٦ جد قيمة ما يأتي :

(٨) ٢ ت + ٦ ب

(٩) ٥ ت ك − ٢ ب

(١٠) ٣ ت س٢ + ب ك

(١١) ½ ب ك٢ + ت ك

(١٢) ½ ب (س + ك)

(١٣) ٢ ب ك٢ − ت٢ س

(١٤) ٥ ت ب س ك

(١٥) ⅔ ت٢ س ك

(١٦) ت ب ك √٧ س

(١٧) ٤ ت − ½ س

(١٨) س٢ − ت٢

(١٩) ك٢ − ٥ ت٢ س

(٢٠) ت √٧ ك٢ + ٤ س٢

(٢١) ٦ ت ب √٩٧ س

(٢٢) ب ك √٧ ٤ ك + ٢ ت

اذا كانت ت = ٤ و ب = ٢٠٠ وس = ١٥٠ وك = ٦ وى = ٤

جد قيمة ما يأتي

(٢٣) ٣ ت − ٥ ب

(٢٤) $\frac{٢ ت + س}{ى}$

(٢٥) ث ب س ى (٢٦) $\frac{ث + ب}{ى}$

(٢٧) س ك – ب ى (٢٨) ١٠ ث ك – ٢ ب ى

(٢٩) $ث^{٢} - ب^{٢}$ (٤٠) $٦\sqrt{١٠٠٠ ب + ى}$

(٤١) $\frac{٢ ث - ٢ س}{ى}$ (٤٢) ك ى – ٥ ث ب س

(٤٣) $\frac{ب + ث + س}{ك ى}$ (٤٤) $\frac{ك + ى}{ب}$

(٤٥) $\frac{٥ ث س !}{ب}$

٣١. استخدام الاقواس . مرّ معنا في علم الحساب انهُ اذا وجد عددان او اكثر مرتبطان بعلامات العمليات الحسابية مهما كانت ووضعت تلك الاعداد داخل قوسين فانها تعتبر بجملتها كمية واحدة غير مجزئة كأنها رمز لعدد مفرد

مثالة : ٣ (٦ + ٤) يراد بها ٣ × ١٠ = ٣٠ ؛ (١٧ – ٣) + (٨ – ٣) يراد بها ١٥ + ٥ = ٣ ؛ $(٥ + ٧)^{٢}$ يراد بها $١٢^{٢} = ١٤٤$ ؛ ٦ (ك + ى) يراد بها ٦ اضعاف مجموع ك وى

٣٢. جذر المربع لكمية ما (ويقال لهُ الجذر الثاني او المالي او التربيعي) هو احد ضلعي الكمية المتساويين . اي هو كمية اذا ضربت في نفسها حصلت الكمية الاولى . فالجذر المالي لـ ٦٤ هو ٨ لان ٨ × ٨ او $٨^{٢} = ٦٤$ والجذر المالي لـ ن^{٢} = ن

٣٣. يدل على ارادة تجذير الكمية بوضعها تحت هذه العلامة $\sqrt{\ }$ وتسمّى "الجذرية" ورقم دليل الجذر فوق زاويتها مثالهُ $٦\sqrt{١٦٩}$ اي الجذر الثاني من ١٦٩ و $٣\sqrt{١٢٥}$ الجذر الثالث من ١٢٥ وهلمّ جرًّا

٣٤. وكما انهُ يقدر دليل القوة اذا كان واحدًا "١" ولا يكتب هكذا دليل الجذر اذا كان اثنين "٢" فلا يكتب كما رأيت

٣٥ . نظام اجراء عمليات الحساب الاساسية . اذا قرأنا السؤال الآتي : ٦ + ٤ × ٩ − ١٢ + ٢ واجرينا العمليات بالتتابع مبتدئين من اليمين كان لنا ١٠ ؛ ٩٠ ؛ ٧٨ ؛ والنتيجة النهائية ٢٦ . ولكن اذا اجرينا عمليات الضرب والقسمة اولاً كما ابنّا ذلك في علم الحساب حصل لنا ٦ + ٣٦ − ٤ = ٣٨ وهذا الامر يظهر لنا جليًّا ان قيمة السؤال تتوقف على النظام الذي نتخذهُ ونتبعهُ . ومنعًا للخطإ اثناء العمل والتداول بالعلامات قد اتفق الرياضيون على ما يأتي وجعلوهُ قانونًا للجري بموجبهِ :

١ . سلسلة العمليات التي تشتمل فقط على الجمع والطرح فانها تتم حسب النظام الذي ترد فيهِ ويبدأ فيها من اليمين الى اليسار

مثالهُ : ٨ + ١٢ − ١٠ + ٦ = ٣٠ − ١٠ + ٦ = ١٠ + ٦ = ١٦

ومن الخطإ ان نشتغل هكذا : ٨ + ١٢ − ١٠ + ٦ = ٣٠ − ١٦ = ٤

٢ . سلسلة العمليات التي تشتمل فقط على الضرب والقسمة فانها تتم حسب النظام الذي ترد فيهِ ويبدأ فيها من اليمين الى اليسار

مثالهُ : ٨ × ١٢ ÷ ٦ × ٤ = ٩٦ ÷ ٦ × ٤ = ١٦ × ٤ = ٦٤

ومن الخطإ ان نشتغل هكذا : ٨ × ١٢ ÷ ٦ × ٤ = ٩٦ ÷ ٢٤ = ٤

٣ . سلسلة العمليات التي تشتمل على الجمع والطرح والضرب والقسمة وتكون خالية من الاقواس والحواصر تتم باجراء عمليات الضرب والقسمة اولاً قبل عمليات الجمع والطرح (حسب منطوق نومرو ٣) وبعدئذٍ يتناول العمل عمليات الجمع والطرح بموجب مبدإ نومرو ١

مثالهُ : ٦ + ٤ × ٩ − ١٢ + ٢ = ٦ + ٣٦ − ٤ = ٣٨

٤ . سلسلة العمليات التي تشتمل على الجمع والطرح والضرب والقسمة وتتضمن

ايضاً الاقواس والحواصر نتم ببسط وحلّ كل قوس على حدة ليصبح ما ضمنها كمية واحدة مفردة وبعدئذٍ يتناول العمل الطرق المقررة في نومرو ١ و٢ و٣

مثالة : ٥ + ٤ (٦ – ٣) = ٥ + ٤ × ٤ = ٥ + ١٦ = ٢١

٨ + (٧ – ٣) (٩ – ٦ + ٢) – ٤ = ٨ + ٤ × ٦ – ٤ = ٢٨

تمرين

اجب ما استطعت شفاهاً

ابسط ما يأتي :

(١) ٢٠ – ٥ + ٦ – ١٠

(٢) ١٦ – (٨ – ٣)

(٣) ١٤ – (١٦ – ٨) + (١٢ – ٤)

(٤) ٦ + ٣ – ٢

(٥) ١٢ + ٢ × ٤ + ٨

(٦) ١٨ – ٦ + ٢ × ٣

(٧) ٦ × ٨ + ٣ – ١٠

(٨) ١٨ + (٣ × ٢)

(٩) (٦ – ٣) (١٧ – ٢ × ٥)

(١٠) ٥ × ٦ + ٤ × ٨ + ١٦

(١١) ١٨ ÷ (٩ – ٣)

(١٢) (١٠ – ٣) (١٦ – ٢ × ٣ + ٨ + ٤)

(١٣) ١٤ – ٣ (١٦ – ٢ × ٥) ÷ ٦ + ٢ × ٨

(١٤) (١٨ – ٣) – ٦ + (٤ + ٢ × ٨ – ١٨ ÷ ٩)

(١٥) (٥ + ٣) (٥ – ٣) + ٤ – ٣

اذا كانت ت = ٥ و ب = ٣ و س = ١ و ك = ٦ جد قيمة ما يأتي :

(١٦) ٥ ت ك + ب + س + ٢

(١٧) ت^{٢} ب ك^{٢}

(١٨) ٢ (٢ ت – س)

(١٩) ك (ت – ب)

(٢٠) ٤ (ت – ٣ س)^{٢}

(٢١) ٢ ك (٢ ت – ٣ ب)^{٢}

(٣٢) ٥ك − ٣(٢ب + س) (٣٣) ٢(ك٢ − ت٢) + ٣ت س

(٣٤) ٣ك (ك − ٣)٢ − ٩ك

(٣٥) (ك − ١)(ك − ٣) + ك (ك − ت)

(٣٦) $\frac{ت+٧س}{ك}$ (٣٧) $\frac{٢ك^{٢}-ب}{ت+٢س}$ (٣٨) $\frac{(ك-١)(ب+١)(٥س-ب)}{ت ب ك}$

٣٦ . ملاحظات نوجه اليها ذهن الطالب

(١) كل قوة للواحد تساوي واحدًا مثاله ١° = ١

(٢) نتيجة الحاصل لا تتغير بتغير ترتيب الاضلاع وبكلام آخر اذا قدّمنا او أخّرنا بعض الاضلاع فالنتيجة لا تتغير

(٣) جرت العادة ان ترتب الاحرف التي يتألف منها الحدّ الجبري حسب ورودها على ترتيب حروف المعجم ولكن هذا ليس من الامور الجوهرية بل هو مجرد استحسان فقط

(٤) اذا كان احد اضلاع الحاصل صفرًا او يساوي صفرًا فالحاصل جميعه يساوي صفرًا مهما بلغت قيمة سائر الاضلاع ويسمى هذا الضلع ضلعًا صفريًا مثاله : اذا كانت م صفرًا فالكمية ك٢ ل٣ م ى٥ = صفرًا مهما كانت قيمة ك ول وى

(٥) كل قوة للصفر تساوي صفرًا . مثاله : اذا كانت ل = صفرًا تكون ل٥ = صفرًا ايضًا

(٦) يجب مراعاة حسن الترتيب واحكام الوضع فان ذلك يساعد كثيرًا على صحة العمل في حلّ التمارين الجبرية

(٧) لا يجوز مطلقًا استعمال علامة = الاّ بين الكميات المتساوية

(٨) يجب تبيان كيفية التدرج اثناء الحلّ والعمل بحيث تظهر كيفية استنتاج كل شيء من الذي قبلهُ

مسائل منثورة

(١) ما نتيجة جمع ٥ اضعاف ك الى حاصل ضرب ل في ٣ ؟

(٢) كم ثمن ٣٠ اقة بن اذا كان ثمن الاقة غ غرشًا ؟

(٣) ثمن ب كتابًا غ غرشًا فما ثمن الكتاب الواحد ؟ ما ثمن ك كتابًا ؟

(٤) كم جزءًا من ل ليرة الليرة الواحدة ؟ ب ليرة ؟

(٥) كم جزءًا من ل ليرة الغرش الواحد ؟ ٦٠ غرشًا ؟ غ غرشًا ؟

(٦) احد ضلعي ك ٥ فما هو الضلع الآخر ؟ احد ضلعي ك م فما هو الضلع الآخر ؟

(٧) عبّر عن مجموع س ساعات ود دقائق كد قائق . كساعات

(٨) باع تاجر ذ ذراعًا وق قيراطًا من ثوب طولهُ ل ذراعًا عبّر عن الباقي بقراريط . عبّر عنهُ باذرع

(٩) المسافة بين بيروت ودمشق ٩٠ ميلاً فاذا سار قطار من بيروت س ساعة بسرعة م ميلاً في الساعة قاصدًا دمشق كم يكون بعدهُ عنها ؟

(١٠) ثمن ذراع الجوخ غ غرشًا فكم يكون ثمن ٥ اذرع ؟

(١١) غرفة طولها ١٢ ذراعًا وعرضها ١٠ كم بلاطة يلزم لرصف ارضها اذا كانت مساحة البلاطة ¼ الذراع المربعة ؟

(١٢) حاصل ضرب عددين ك واحدهما ل فما هو الآخر ؟

(١٣) احد جزئي ك ل فما هو الجزء الآخر ؟

(١٤) نزل توفيق الى السوق وفي جيبه ل ليرة واشترى طعاماً بـ ت ليرة فكم بقي معه ؟

(١٥) اذا كان ثمن ل ليمونة غ غرشاً فكم ثمن الدزينة ؟

(١٦) مجموع عددين ٤ وأكبرهما ك فما هو الآخر ؟ ما نسبة الاكبر الى المجموع ؟ الى الاصغر ؟

(١٧) ما زيادة ل عن ٥ ؟ زد على ل مياً . زد على ف نوناً

(١٨) اي عدد يأتي بعد ف ؟ اي عدد يأتي بعد ذلك ؟

(١٩) اي عدد اكبر من م بـ ٤٣ ؟ بـ ل ؟

(٢٠) اي عدد اقل من ل بـ ٣ ؟ بـ ن ؟

(٢١) لو وزّع رجل ك كغاً على اولاده الاثني عشر فكم ينال الواحد ؟

(٢٢) لو وزّع غني ١٠٠ ليرة بين ف فقيراً فكم حصة الفرد ؟

(٢٣) اكتب ثلاثة اعداد متتابعة يكون اوسطها ل

(٢٤) لرجل غ غرشاً انفق منها ر غرشاً فكم بقي عنده ؟

(٢٥) باع احدهم حصاناً بـ غ غرشاً فخسر ل غرشاً فكم كان ثمنه الاصلي ؟

(٢٦) كان لولد ك كلل وربح فوقها ن فكم اصبح لديه ؟ واذا كانت ك ١٢٠ و ن ٢٥ فكم صار عنده اخيراً ؟

(٢٧) ابتاع لحام خ خروفاً وذبح منها في شهر م وباع ل فما الباقي ؟

(٢٨) اشترى لحام د خروفاً وبعد مرور شهر وجد ان لديه ر خروفاً فقط فكم ذبح ؟

(٢٩) عندي ل ليرة فكم يبقى عندي لو انفقت ف ليرة ؟

(٣٠) عمر ولد ١٢ سنة فكم يكون عمرهُ بعد م سنة ؟ وكم كان عمرهُ منذ س سنة ؟

(٣١) باع احدهم حصانًا بمبلغ ل ليرة وربح ب ليرة فكم كان ثمنهُ الاصلي ؟

(٣٢) ثلاث مدن في خط مستقيم تبعد الثانية عن الاولى ف ميلاً وتبعد الثالثة عن الاولى م ميلاً فكم المسافة بين الثانية والثالثة ؟

(٣٣) اي عدد اكثر من م بـ ل ؟ كم تزيد ك عن ن ؟

(٣٤) اذا كانت ل قسماً من م فما هو القسم الآخر ؟

(٣٥) كم يجب ان تجمع الى م حتى تصير بقدر ل ؟

الفصل الثاني

الكميات السلبية . الخطوط والرسوم البيانية

القسم الاول

٣٧ . الاعداد الايجابية والسلبية . يحدث احيانًا ان تكون الاعداد المعبّر عنها متباينة او متناقضة كما في الامثلة الآتية :

معدل حرارة شهر آب في بيروت ٢٩° فوق الصفر ومعدل شهر كانون الثاني في الشوير ٤° تحت الصفر

فواد يملك ١٢٠٠ ليرة ولكن سامي مديون بقيمة ٩٠٠ ليرة

يوسف سار ١٠٠ ميل شرقًا وخليل ٢٠٠ ميل غربًا

عرض بيروت ٣٤° الى الشمال من خط الاستواء وعرض ريو جانيرو ٢٣° الى الجنوب منهُ .

فالاعداد ٢٩° و٤° ؛ ١٢٠٠ ليرة و٩٠٠ ليرة ؛ ١٠٠ ميل و٢٠٠ ميل ؛ ٣٤° و٢٣° زوجًا زوجًا تختلف في نوع دلالتها ولاجل التمييز بينها نسمي الفئة الاولى اعدادًا ايجابية وعكسها المخالف لها اعدادًا سلبية

٣٨ . العدد السلبي هو العدد الذي باعتبار الظروف يخالف عددًا آخر اتخذناهُ ايجابيًا كما في الامثلة السابقة

٣٩. العلامات . ولبيان نوع الاعداد نسبق الايجابية منها بالعلامة "+" فيقال لها "ايجاب" والسلبية تتقدمها العلامة "−" ويقال لها سلب . فاذا قرأت درجة الحرارة لبوم ما + ٢٣° فللحال تفهم انها فوق الصفر وبالعكس اذا قرأتها −٨° فانك تفهم انها تحت الصفر

٤٠ . اما الاعداد التي لا تكون مسبوقة باحدى العلامتين فهي ايجابية ويكون ترك العلامة علامة لها . وهذا الترك جائز لا بل واجب في بداءة السطر او العمل اما الكميات السلبية فيجب ان تكون دائمًا مسبوقة بعلامة السلب

تمرين

(١) ما معنى : حرارة −١٢° ؟ عرض بلد −٣٥° ؟ بنى الاسكندر مدينة الاسكندرية سنة −٣٣١ للمسيح (تكون التواريخ بعد ميلاد المسيح ايجابية) ؟

(٢) مقياس الحرارة الآن +١٠° فما درجتها اذا هبطت ٥° ؟ ١٠° ؟ ١٥° ؟

(٣) مقياس الحرارة الآن −١٥° فما درجتها اذا ارتفعت ٨° ؟ ١٥° ؟ ٣٥° ؟

(٤) اذا كانت درجة الحرارة ١٥° وقت الظهر و−٦° نصف الليل فما مقدار هبوطها ؟

(٥) اذا كانت درجة الحرارة −٣° وهبطت الى −١٥° فما مقدار هبوطها ؟

(٦) اذا كان المسافر في عرض −٥° وسار شمالاً ١١° ؟ فكم يكون عرضهُ ؟ كم يكون عرضهُ لو سافر جنوبًا ١١° ؟

(٧) ثروة رجل −٥٠٠٠ ليرة واستطاع ان يوفر ١٥٠٠ ليرة سنويًا فكم تكون ثروتهُ في نهاية ٦ سنين ؟

(٨) سافرت باخرة من عرض +١٢° الى عرض −٧° فكم تكون المسافة اذا كانت الدرجة ٦٠ ميلاً ؟

(٩) سافرت باخرة جنوباً من عرض +٣٠° بسرعة ٤° في اليوم فاي عرض تصل في نهاية ٦ ايام ؟ في كم من الوقت تصل عرض −١٦° ؟

(١٠) اذا اتخذنا الجهة الشرقية ايجابية والغربية سلبية فاذكر مدينتين في الجهة الايجابية من بيروت ومدينتين في الجهة السلبية

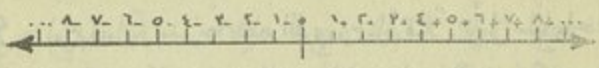
(١١) اذا اتخذنا الجهة الشمالية ايجابية والجنوبية سلبية فاذكر مدينتين بُعد كل منهما عدد ايجابي من بيروت ومدينتين بعدها سلبي

(١٢) اذكر ٥ مدن ابعادها من خط الاستواء اعداد سلبية و٥ مدن ابعادها ايجابية

(١٣) بيّن اي التغيرات الآتية ايجابية وايها سلبية :

من ٣° الى ١٥° ؛ من −١٢° الى −٥° ؛ من ٩° الى −١١° ؛ من −١٥° الى ١١°

من ٩° تحت الصفر الى ٣° تحته . من ١١° فوق الصفر الى ٣° تحته . من ٧° تحت الصفر الى ٢٥° فوقه



مقياس مدرّج

(١٤) ارسم مقياساً مدرّجاً كما في الرسم اعلاه ودلّ على النقطة التي تقابل الاعداد الآتية : +٣ ؛ −٤ ؛ +٥ ؛ +٧ ؛ −١ ؛ −٣ ؛ +٢٫٥ ؛ −١٫٥ ؛ −٦٫٥ صفرًا

(١٥) استخدم العلامات + و – لتكتب باخصر طريقة : ٤٥ درجة فوق الصفر و٣٥ تحته

(١٦) اذا دلّ ميزان الحرارة على – ٢٢° فكم يجب ان ترتفع الحرارة ليدل على – ٥°؟ اي عدد تضيفه الى – ٢٢ ليكون المجموع – ٥؟

(١٧) اذا كانت درجة الحرارة – ٢٥° فكم يجب ان ترتفع لتصبح ١٠°؟ كم تضيف الى – ٢٥ لتصبح ١٠؟

(١٨) تحسب التواريخ قبل ميلاد المسيح سلبية وبعدهُ ايجابية . فاذا ولد اوغسطس قيصر سنة – ٦٣ وتوفي سنة ١٤ كم سنة عاش؟ كم تضيف الى – ٦٣ لتصبح ١٤؟

(١٩) ولد اسكندر الكبير (المكدوني) سنة – ٣٥٦ وتوفي سنة – ٣٢٣ فكم سنة عاش؟ كم تضيف الى – ٣٥٦ لتصبح – ٣٢٣؟

(٢٠) رجل مديون بـ ٨٠٠ ليرة (اي ثرونة – ٨٠٠ ليرة) ثم ربح مبلغاً فاصبحت ثرونة – ١٥٠ ليرة فما مقدار ربحهُ؟ كم يجب ان يربح لتصبح ثرونة ١٧٠٠ ليرة؟

٤١ . ارسم مقياساً مدرّجاً نظير الذي رسمناهُ قبلاً . تأمل ملياً واحفظ مراكز الاعداد النسبية . ولا تنسَ ان جهة اليمين منهُ (وبداءتها الصفر) تختص بالاعداد الايجابية وجهة اليسار تختص بالاعداد السلبية وزيادة على ذلك اذا سرتَ نحو اليمين فالحركة ايجابية واذا سرتَ نحو اليسار فهي سلبية والآن نستخدم هذا المقياس لبيان عمليات الجمع والطرح فنقول :

اذا جمعنا ٥ و٣ مثلاً فاننا نعد (على المقياس) الى اليمين ٣ ثم نعد ٥ وننتهي

بالنقطة ٨ التي تدل على مجموع ٥ و٣ ولا فرق في النتيجة اذا عددنا اولاً ٥ ثم ٣ لاننا في الحالتين ننتهي بـ ٨

والمهم في المثال السابق ان الحركة كانت "تقدمية" من اليسار الى اليمين فليتنبه الطالب جيداً الى هذا الامر

اما اذا قلنا نطرح ٤ من ٧ فاننا نعد (على المقياس) ٧ الى اليمين ثم نعدّ منها اي من السبعة الى اليسار ٤ حيث ننتهي بـ ٣ التي هي باقي طرح ٤ من ٧ ونرى هنا ان الطرح تم بالسير الى اليسار اي اننا اتبعنا حركة رجعية او تقهقرية التي كانت عكس حركة الجمع

تمرين

استخدم المقياس المدرج للجمع والطرح في الاسئلة الآتية :

(١) اجمع ٤و٣ (٢) اجمع ٤ و-٣ (٣) اجمع ٥و-٣

(٤) اجمع ٣و-٣ (٥) ٣ و-٤ (٦) اجمع ٥ و-٧

(٧) اجمع -٣ و٤ (٨) اجمع -٥ و٧ (٩) اطرح ٣ من ٥

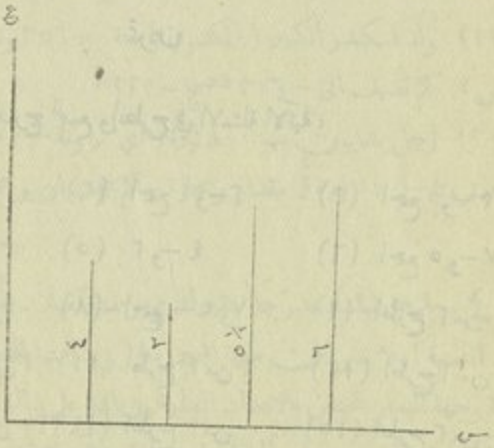
(١٠) اطرح ٥ من ٣ (١١) اطرح ٤ من ٦ (١٢) اطرح ٦ من ٤

(١٣) اطرح ٤ من -٣ (١٤) اطرح ٣ من -٤ (١٥) اطرح ٣ من -٣

٤٣. الرسم والخطوط البيانية . اذا احببنا ان نقابل بين كميتين ونفهم حقيقة نسبة كل منهما الى الاخرى باجلى بيان فاننا نمثلها بخطوط دقيقة في الرسم البياني.

وقد اصبحت هذه الطريقة – طريقة الرسم بالخطوط البيانية – اشهر الطرق العلمية لاجل المقابلة بالنسبة لسهولتها وحسن دلالتها ومن امثلتها رسم حرارة المرضى يوميًا وحرارة الهواء وضغطه وقوى الآلات في الميكانيكيات ونتائجها . ونتائج الاحصاءات العديدة المختلفة وخصوصًا في علم الاقتصاد

مثالة : طول جورج ٤ اقدام وفؤاد ٣ وعارف ٥½ واديب ٦ واذا مثلنا القدم بخط طولهُ ١ سنتيمترًا فاننا نمثل ٤ اقدام بـ ٤ سنتيمترات و٣ اقدام بـ ٣ سنتيمترات و٥½ قدم بـ ٥½ سنتيمتر و٦ اقدام بـ ٦ سنتيمترات . ثم نرسم خطين عموديين احدهما افقي والاخر قائم عليهِ وعلى ابعاد متساوية على الخط الافقي نرسم خطوطًا عمودية طولها ٤ سنتيمترات و٣ و٥½ و٦ على التوالي كما ترى ادناهُ



ومن الرسم يمكنك ان ترى بلمحة بصر المقابلة النسبية بين طول الاربعة الاشخاص المذكورين

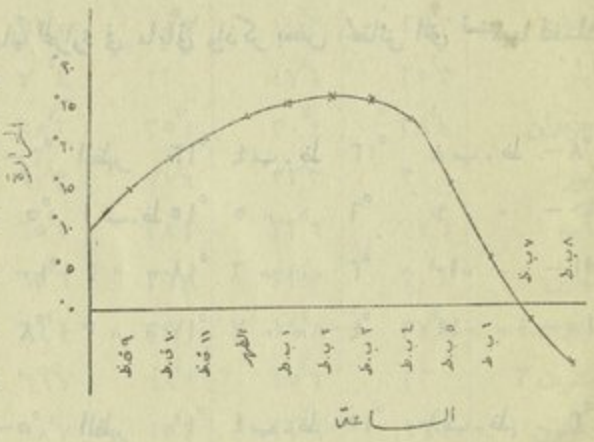
٤٣. الخط البياني. عبارة عن جمع عدد من الحقائق المعبر عنها بالاعداد ووضعها بشكل خط هندسي

مثالة : بلغ قياس الحرارة في مكان معين لاحد الايام من الساعة ٨ قبل الظهر (ق . ظ) الى الساعة ٨ بعد الظهر كما يأتي :

٨ ق. ظ ١٠°	١١ ق. ظ ٢٢°	٢ ب. ظ ٢٧°
٩ " " ١٥°	الظهر ٢٤°	٣ " " ٢٧°
١٠ " " ١٨°	١ ب. ظ ٢٥°	٤ " " ٢٤°

٥ ب. ظ ١٥°	٧ ب. ظ — ٢°
٦ " " ٧°	٨ " " — ٦°

المطلوب رسم خط بياني للقياسات المذكورة



نستخدم لاجل سهولة العمل الورق المقسم الى مربعات ثم نرسم خطين عموديين احدهما افقي (ويقال له المحور الافقي) والآخر قائم عليه (ويقال له المحور الراسي) ونجعل كل قسم من المحور الافقي يمثل ساعة واحدة وكل قسم من المحور الرأسي يمثل ٥° درجات ثم نعين على خط النقطة التي تمثل ساعة نقطة تدل على عدد درجات حرارة تلك الساعة وهذه النقطة تكون فوق الخط الافقي اذا كانت درجة الحرارة ايجابية والاّ فتحته اذا كانت سلبية . واخيرًا نرسم خطًا متصلاً يمرّ بالنقط المعيّنة هو الخط البياني المطلوب

تمرين

(١) انظر الرسم السابق جيدًا وعيّن:

(ب) وقت معظم الحرارة (ت) مقدار الحرارة الساعة ١½ و٤½

(ث) اي وقت بعد الظهر كانت الحرارة مساوية لما كانت عليه الساعة ٩ قبل الظهر

ارسم خطًا بيانيًا للحرارة في ما يأتي واذكر بعض الحقائق التي تستنتجها لنفسك من الرسم

(٢) ٨ ق. ظ −٢° الظهر ١٢° ٤ ب. ظ ١٢° ٨ ب. ظ −٨°

٩ „ „ ٥° ١ ب. ظ ١٥° ٥ „ „ ٦° ٩ „ „ −١٠°

١٠ „ „ ١٠° ٢ „ „ ١٨° ٦ „ „ ٢° ١٠ „ „ −١٢°

١١ „ „ ٨° ٣ „ „ ١٧° ٧ „ „ −٤° ١١ „ „ −١٥°

(٣) ٨ ق. ظ −٥° الظهر ١٠° ٤ ب. ظ ١٣° ٨ ب. ظ ٢°

٩ „ „ ٢° ١ ب. ظ ٨° ٥ „ „ ٩° ٩ „ „ ٠°

١٠ „ „ ٧° ٢ „ „ ١٢° ٦ „ „ ٧° ١٠ „ „ −٣°

١١ „ „ ١٢° ٣ „ „ ١٥° ٧ „ „ ٤° ١١ „ „ −٥°

المعدلات الآتية في الجدول ادناه مأخوذة من سجل مرصد الجامعة الاميركية ومدتها ٤٠ سنة

اسم الشهر	معظم الحرارة	اقل الحرارة	متوسط الحرارة	الرطوبة ٪	المطر مم
كانون ٢	١٦٫٦	٩٫٨	١٣٫١	٦٨٫٦	١٨٤٫٩
شباط	١٦٫٨	٩٫٨	١٤٫٣	٧٠٫٨	١٥١٫٩
اذار	١٩٫٤	١١٫٧	١٥٫٥	٧٠٫٨	٩٣٫٣
نيسان	٢٣٫٣	١٤٫٣	١٨٫٧	٧١٫٥	٥١
ايار	٢٥٫٣	١٧٫١	٢٢	٧٠٫٤	١٦٫٨
حزيران	٢٨٫٤	٢٠٫٤	٢٥٫١	٦٨٫٣	١٣٫٧
تموز	٣١	٢٣٫٣	٢٧٫٤	٦٧٫٣	—
آب	٣١٫٦	٢٣٫٩	٢٨٫١	٦٥٫٩	—
ايلول	٣٠٫١	٢٣٫٣	٢٦٫٨	٦٣٫٦	١٠٫٩
تشرين ١	٢٧٫٥	١٩٫٨	٢٤	٦٦٫١	٤٨٫٩
تشرين ٢	٢٢	١٥٫٩	١٨٫٩	٦٦٫٧	١٣٥٫١
كانون ١	١٩٫٣	١١٫٦	١٥٫٣	٦٨٫٧	٢٠٥٫٥

مثّل برسم بياني دقيق

(٤) عمود معظم الحرارة (درجة الحرارة بمقياس سنتكراد)

(٥) " اقل الحرارة (٦) عمود متوسط الحرارة

(٧) " الرطوبة (٨) " المطر (المقياس ملميترات)

تنبيه : يستحسن اتخاذ عددًا مناسبًا من وحدات قياسات الجداول وتمثيله بقسم على المحور الرأسي توفيرًا للورق ففي عمود الرطوبة نتخذ ١٠ وحدات وتمثل بقسم وفي عمود المطر ١٠ ميليمترات او ٢٠ ميليمترًا (او اي عدد آخر) تمثل بقسم

(٩) كمية المطر الساقطة في بيروت كانت كما يأتي : سنة ١٩٠١ ٣٦ قيراطًا . ١٩٠٢ ٣٦ . ١٩٠٣ ٤٥ . ١٩٠٤ ٣١ . ١٩٠٥ ٤٠ ١٩٠٦ ٤٣. مثّل الكمية الساقطة سنة فسنة برسم لاجل المقابلة بينها وارسم الخط البياني

(١٠) موسى الاول في صفو ومعدله السنوي ٩٣ . حنا الثاني ومعدله ٩٠ . فارس الثالث ومعدله ٨٤ . سليم الرابع ومعدله ٨٠ . بطرس الخامس ومعدله ٧٦ . مثّل ذلك برسم بياني

(١١) كان معدل الحرارة في اليوم الاول من اشهر السنة في مدينة نيويورك كما يأتي :

ك ٢ ٤١° . شباط ٤١ . آذار ٤٥ . نيسان ٤٢ . ايار ٥٤ حزيران ٦٤ . تموز ٧١ . آب ٧٣ . ايلول ٦٩ . ت ١ ٦١ . ت ٢ ٤٩ . ك ١ ٤٩ مثّل ذلك برسم بياني

(١٢) كان معدل الحرارة في اليوم الاول من اشهر السنة في مدينة لندن كما يأتي :

ك ٢ ٤٧° . شباط ٤٨ . آذار ٤٠ . نيسان ٤٥ . ايار ٥٠ حزيران ٥٧ . تموز ٦٣ . ايلول ٥٩ . ت ١ ٥٤ . ت ٢ ٤٦ ك ١ ٤١ . مثّل ذلك برسم بياني

(١٣) عرض نهر ١٠٠ متر . وعمقه على ابعاد متساوية كل منها ١٠ امتار كما يأتي: ٥ امتار و٨ و٢٠ و٢٢ و١٥ و١١ و٨ و٦ و٤ مثّل ذلك برسم بياني لاظهار خط القاع

ملاحظة : ١ جعل خط سطح الماء المحور الافقي ومثّل كل قسم منه بعشرة امتار فيكون خط القاع تحت المحور الأفقي وهو الخط الذي يصل نقط القياس ويمرّ بها

(١٤) عرض نهر ٢٤٠ قدماً وعمقهُ على ابعاد متساوية كل منها ٢٠ قدماً كما يأتي : ٢ و٤ و٧ و١٠ و١٩ و١٦ و٢٢ و٣٥ و٤٠ و١٢ قدماً على التتابع . مثّل ذلك برسم بياني

(١٥) لو فرضنا عدد سكان قرية مدة ٦ سنوات متوالية : ٤٢٠٠ و٤٣٠٠ و٤٤٠٠ و٤٥٠٠ و٤٦٠٠ و٤٧٠٠ فمثّل ذلك برسم بياني

(١٦) معدل وزن الولد من السابعة الى الثانية عشرة من عمرهِ كما يأتي : ٤٨ و٥٢ و٥٧ و٦٣ و٦٩ و٦٨ ليبرة على التتابع . مثّل ذلك برسم بياني

٤٤. حلّ الاعمال مثال : ربح اربعة شركاء ٤٥٠٠٠ ليرة فاصاب الاول ٣٠٠٠ ليرة اكثر من الثاني . والثالث ضعفي الثاني . والرابع ٣ اضعاف الثاني . فكم ربح كل منهم ؟

الاعداد المذكورة في السؤال	رموز الاعداد
عدد الليرات التي ربحها الاول	ك + ٣٠٠٠
" " " " الثاني	ك
" " " " الثالث	٢ك
" " " " الرابع	٣ك
" " " " الاربعة	٤٥٠٠٠

العبارة التي تربط الاعداد برموزها

مجموع الاربعة الاعداد الاولى = العدد الاخير

اطلب من التلميذ تكملة العمل

(١) ركش رجل وولد حقلاً مساحته ٦٠٠٠ ذراعاً مربعة فاذا ركش الرجل ٤ اضعاف ما ركشه الولد كم ذراعاً ركش كل منهما ؟

(٢) يبلغ ارتفاع تمثال الحرية في ميناء نيويورك ٣٠٦ اقدام فوق سطح الماء . وعلوّ القاعدة اكثر من علوّ التمثال بـ ٤ اقدام فما علوّ كل منهما ؟

(٣) لعمل البارود نأخذ كميات متساوية الوزن من الفحم ومن الكبريت وثقلها من ملح البارود فكم يجب ان نأخذ من كل منها لعمل ١٠٠٠ كيلوكرام بارود ؟

(٤) اصطاد حسن وسليم ٥٤٠ اقة سمك . وكان ما اصطاده سليم ضعفي ما اصطاده حسن فكم اقة اصطاد كلٌّ منهما ؟

(٥) رجل يملك ٩٦٦٠ ليرة مودعة في بنكين فاذا كان اودع ١٢٠٠ ليرة في احدهما اكثر مما اودع في الآخر ما المبلغ الذي اودعه في كل منهما ؟

(٦) اقسم ٢٨٠٤ ليرات بين رجلين بحيث ينال احدهما ٨٠٠ ليرة اكثر من الآخر

(٧) اقسم ٧٠٠٠٠ بين ٣ شركاء حتى ينال الاول ٦٠٠٠ ليرة اكثر من الثاني والثالث ضعفي الثاني

(٨) جد ثلاثة اعداد متتابعة مجموعها ٧٢

(٩) جد اربعة اعداد متتابعة مجموعها ٢١٨

(١٠) محيط حقل ٢١٨ متراً وطوله اكثر من عرضه بـ ٩ امتار فكم طوله وعرضه ؟

(١١) مجموع زوايا المثلث ١٨٠°. فاذا كانت الزاوية ب اكثر من الزاوية ت بـ ١٠° والزاوية ت اكثر من الزاوية ج بـ ٢٥° كم درجة في كل من الثلاث زوايا ؟

(١٢) احدى زوايا مثلث ٩٠° . فاذا كانت احدى الزاويتين الباقيتين (الحادتين) ٥ اضعاف الثانية فما مقدار كل منهما ؟

القسم الثاني

٤٥ . الاعداد الجبرية اسم عام للاعداد الايجابية والسلبية

٤٦ . القيمة المطلقة لعدد ما هي قيمة ذلك العدد بقطع النظر عن العلامة التي تسبقه لتدل على نوعه

مثاله : اذا سار رجل ٧ اميال شرقاً وآخر ٧ اميال غرباً فالمسافة المطلقة التي قطعها كلٌّ منهما هي هي نفسها اي ٧ اميال . ولكن اذا نظرنا اليها من الوجهة الجبرية فاننا نجدها تختلف باختلاف الجهة لان المسافة الى الشرق غير المسافة الى الغرب فالاولى + ٧ اميال والثانية — ٧ اميال

وبالاجمال فالقيمة المطلقة للعددين + ٧ و — ٧ هي ٧ وللكميتين + ب و — ب هي ب دون اعتبار العلامات

تمرين

ما القيمة المطلقة لِ : — ١٩ اميال ؟ + ١٩ اميال ؟ — ١٧ متراً ؟ — ٥° ؟ — ٥٠٠ ريال ؟

ارسم خطاً طوله ٢٠ سنتيمتراً واقسمه الى سنتيمترات . خذ نقطة نصف الخط واجعلها نقطة الصفر او نقطة البداءة واحسب المسافات الى يمينها ايجابية والى يسارها

سلبية والسير الى جهة اليمين ايجابيًا والى اليسار سلبيًا كما مرّ بك

(٣) دلّ على ما يأتي : ٥ سنتيمترات . – ٣ سنتيمترات . + ٩ سنتيمترات – ٥ سنتيمترات . – ٧ سنتيمترات

(٣) اجمع ٣ سنتيمترات وسنتيمترين . اجمع للنتيجة – ٤ سنتيمترات . ثم ١ سنتيمترًا . ثم – ٧ سنتيمترات . ثم + ٥ سنتيمترات . ثم – ٣ سنتيمترات

(٤) ما المراد بقولنا سطح البحر الميت يعلو عن سطح بحر الروم – ١٣٠٠ قدم ؟ سطح بحيرة طبرية يعلو – ٦٠٠ قدم ؟

٤٧. فائدة الاعداد السلبية . نستخدم العلامة "سلب" كما مرّ بنا للدلالة على المخالفة او التناقض فيصح لدينا نوعان متضادان من الكميات وهذا يسهّل علينا التعبير والعمل في كثير من الامور العملية التي نجدها في العلوم الطبيعية . واقرب مثال لذلك مقياس الحرارة الذي نجد فيه نقطة معيّنة محدودة هي الصفر والدرجات فوقها وتحتها والفارق بينها العلامات فاذا قلنا الحرارة ١٨° عرفنا انها فوق الصفر ولكن اذا قلنا – ١٨° ادركنا حالاً انها تحت الصفر

وكلما تقدم الطالب يرى ويدرك جليًا فائدة استخدام الاعداد السلبية واهميتها في الابحاث الرياضية

ملاحظة مهمة : السير على المقياس المدرّج من اليسار الى اليمين . والاعداد الايجابية الصغيرة تسبق الكبيرة اي اننا نمرّ عليها اولاً . والنقط التي تمثل الاعداد السلبية تسبق ما يمثل الصفر والاعداد الايجابية . فالاعداد السلبية اذًا اقل من الصفر وكذلك اقل من اي عدد ايجابي مهما كان صغيرا . وعليه – ٧ اقل من – ٦ و – ١ اقل من ٠ وهلمّ جرًا

٤٨. طرح الاعداد السلبية والايجابية . حينما نطرح ٧ من ١٢ نسأل ما

العدد الذي نجمعهُ الى ٧ ليكون المجموع ١٢. وهذا ما نفعلهُ حينما نطرح ٨ من ٥ او ٢٥ من ٤٣ او اي عدد كان ب من اي عدد آخر ت . فهذه الامثلة تظهر جليًّا العلاقة الاساسية بين الطرح والجمع . واذا حفظنا هذا المبدأ وجرينا بموجبهِ سهُل علينا طرح الاعداد السلبية والايجابية ولاجل ذلك نضرب الامثلة الآتية :

(١) اذا كان رجل مديونًا بـ ٥ ليرات فكم يجب ان يحصل ليفي الدين ؟

(٢) ما العدد الذي تضيفهُ الى − ٥ لتكون النتيجة صفرًا ؟ واحدًا ؟

(٣) خذ المقياس المدرج وانظر كم قسمًا بين − ٥ و + ٥

(٤) ماذا تضيف الى − ١ ليكون المجموع + ٦ ؟ ما الفرق بين + ٦ و − ١ ؟

فجواب هذه الامثلة يثبت جليًّا ان الفرق بين عددين هو عدد اذا اضيف الى احدهما نتج الآخر كما تعلمنا في الاعداد الايجابية

(ت) اذا قلنا اطرح − ٤ من + ٥ فاننا نسأل ماذا نضيف الى − ٤ لتكون النتيجة صفرًا ؟ ١ ؟ ٥ ؟

وبما ان $-٤+٩=٥$

فاذًا نتيجة طرح − ٤ من + ٥ هي ٩

اي ان $٥-(-٤)=٩$

(ث) واذا قلنا اطرح + ٥ من − ٤ فاننا نسأل ماذا نضيف الى + ٥ لتكون النتيجة صفرًا ؟ − ١ ؟ − ٤ ؟

وبما ان $+٥+(-٩)=-٤$

فاذًا نتيجة طرح + ٥ من − ٤ هي − ٩

اي ان $-٤-(+٥)=-٩$

(ج) واذا قلنا ما الفرق بين − ٦ و − ٢ فاننا نسأل ماذا نضيف الى − ٦ لتكون

النتيجة – ٢؟ او كم درجة ترتفع الحرارة اذا سارت من – ٦ درجات حتى تبلغ سلب درجتين ؟ والجواب يدل على ان

$$-٢-(-٦)=٤$$

وبذات الطريقة نظهر ان $-٦-(-٢)=-٤$

فنستنتج من جميع الامثلة المارّة انهُ لطرح اي عدد كان من اي عدد آخر

يجب تغيير علامة المطروح وجمعهُ الى المطروح منهُ

مثالهُ: $٧-(-٣)=٧+٣=١٠$ اي اننا غيّرنا – ٣ الى + ٣

$-١٢-(+٨)=-١٢-٨=-٢٠$ اي اننا غيّرنا ٨ الى – ٨

وهذا القانون يرتكز ويتوقف على المبدإ الاساسي المتضمن في السؤال ماذا يجب ان نجمع الى المطروح ليكون المجموع المطروح منهُ†

تمرين *

(١) $١١-٤=?$ $١١-(-٤)=?$ $٤-١١=?$ $٤-(-١١)=?$

$-١١-(-٤)=?$

---

† يوسع الطالب ان يطبق امثلة الطرح على المقياس المدرّج اذا تذكر وحفظ ان يعين عدد المطروح على المقياس اولاً ثم يعين عدد المطروح منهُ ويجد الفرق بين النقطتين كما مرّ معنا في الجمع ويجب ان لا ينسى ان الحركة من اليسار الى اليمين ايجابية والعكس بالعكس

* ننصح الطالب ان يرسم مقياساً مدرّجاً يستخدمهُ في حلّ الامثلة حيث يجد لزوماً لذلك ونرجو من الاستاذ ان يطلب من الطلبة رسم خطوط للدلالة على فهم الاهمال والاستعانة بها على حلها وشرحها لانها تسهل العمل وتزيد رسوخ الطريقة في الذهن وتمرّب القياس والاستنتاج وتعمل على توسيع المدارك

(٣) ماذا تجمع الى −١٥ ليكون المجموع ١٥ ؟ ١٥ − (−١٥) = ؟

(٤) ماذا تضيف الى ٢٠ ليكون المجموع −٢٠ ؟ −٢٠ − ٢٠ = ؟

(٤) كم نتيجة: ٥ − ٩ ؟ ٩ − ٥ ؟ −٥ − ٩ ؟ −٥ − (−٩) ؟ −٩ − ٥ ؟ ٩ − (−٥) ؟

(٥) كم نتيجة: ٧ − ٧ ؟ ٧ − (−٧) ؟ −٧ − (−٧) ؟ −٧ − ٧ ؟

(٦) −١٤ − (−١٩) = ؟ (٧) ١٢ − (+٣) − (+٢) = ؟

(٨) −١٢ − (+٣) − (+٢) = ؟

(٩) −١٢ − (−٣) − (−٢) = ؟ (١٠) ١٨ − (−٥) − ٧ = ؟

(١١) ما الفرق بين مبيع سيارة بخسارة ٥٠ ليرة ومبيعها بربح ٣٠ ليرة ؟

(١٢) راسال تاجر ٨٧٥٠ ليرة فاذا خسر ٦٨٧٥ ليرة كم يبقى له ؟

(١٣) خرج قطاران من محطة واحدة وسارا بذات الوقت في جهتين مختلفتين فكم تكون المسافة بينهما بعد مضي ٤ ساعات اذا كانت سرعة الاول ٥٢٫٧ ميلاً في الساعة والثاني ٤٣٫٩ ميلاً ؟

(١٤) كانت درجة الحرارة في صباح احد ايام الشتاء في مدينة شيكاغو −١٢° وبلغت بعد الظهر ٤٧° فكم درجة ارتفعت ؟

(١٥) سار قطاران في جهة واحدة على خطوط متوازية بسرعة ٦٠ ميلاً و٤٢ ميلاً في الساعة. ما الفرق في سرعتهما ؟ فكم مقدار اقتراب الواحد من الآخر ؟

٤٩. ضرب الاعداد السلبية والايجابية. نستطيع ان نكتب كلمة "دمشق" ثلاث مرات ولكن ليس بوسعنا ان نكتبها ٣½ مرات. واذا طلب منا ذلك فاننا نخرّج العبارة ونحوّرها ونقول مطلوب كتابة الكلمة ثلاث مرات ثم نصفها اي نصف احرفها. وهكذا اذا طلب منا ان نضرب ١٠٠ في ٣½ فانه لا يجوز ان نقول "نأخذ

المئة ٤½ مرات " اذ لا معنى لذلك ولكننا نحوّر العبارة ونقول نأخذ المئة ٤ مرات ثم نأخذ نصفها واخيرًا نجمع النتيجتين . اي اننا نتفق اولاً على المعنى المقصود من عبارة " ٤½ مرات " و بعدئذٍ نستخدمها حسب الاتفاق

وعلى نفس المبدإ نقول انهُ اذا طلب منا ان نضرب عددًا ما في " – ٥ " فالعبارة لا معنى لها . فيجب اذًا تحويرها والاتفاق على المراد بها قبل استعمالها

نعلم جيدًا ان ٢ × ٤ = ٤ × ٢ وبمبدإ القياس والتمثيل نتفق على ان

٢ × (– ٤) = (– ٤) × ٢

ولكننا نعلم ان ٢ × (– ٤)* = (– ٤) + (– ٤) = – ٦ اي ان (– ٤) مأخوذة او مجموعة مرتين

فاذًا (– ٤) × ٢ = – ٦

فنرى اذًا انهُ اذا ضربنا عددًا ايجابيًا في عدد سلبي فاننا نضرب كما لو كان المضروب فيهِ عددًا ايجابيًا ثم نغير علامة الحاصل كما رأيت

واخيرًا نضرب (– ٤) × (– ٣) هكذا : ٤ × (– ٣) = – ٦ ثم نغيّر علامة الحاصل كما ذكرنا سابقًا فنصبح ٦

ولاجل التعميم نقول

+ ب × + ت = + ب ت

+ ب × – ت = – ب ت

– ب × + ت = – ب ت

– ب × – ت = + ب ت

---

* لا فرق البتة من وضع المضروب فيهِ قبل علامة الضرب او بعدها ولكنني مجاراة للمؤلفات الحديثة في اللغات الاجنبية اصطلحت على كتابتهِ قبلها فارجو الانتباه الى ذلك

فالقانون اذاً اذا اتفقت علامتا المضروبين كانت علامة الحاصل "+" واذا اختلفتا كانت "−" فاحفظ ذلك جيداً

تمرين

جد حاصل ضرب الاعداد الآتية :

(١) ٤×٣ ; ١٢×٤ ; −٥×٤ ; −٦×٦ ; −٨×٧ ; −٧×−٣
−١٢×٩ ; −٦×٤ ; −٦×−٦ ; −٥×١٠

(٢) ٤×−٦ ٥×−٦ ; ٤×−٧ ; ٥×−٧ ; ٤×−٥ ×−٦
−٤×٣×−٦ ; −٣×−٣ ; ٥−×٣ ; ٥×٣×−٣

(٣) اذا قبضت ١٠ ليرات من كلٍّ من ٤ رجال فكم المبلغ الذي قبضته ؟
٤×١٠ = ؟

(٤) اذا دفعت ١٠ ليرات لكلٍّ من ٤ رجال فكم ليرة دفعت ؟
٤×(−١٠) = ؟

(٥) ترك ٤ رجال البلاد قبل ان يدفعوا ديونهم لك . وكان كلٌّ مديوناً بـ ١٠ ليرات فما مبلغ خسارتك ؟ (−٤)×١٠ = ؟

(٦) سافر ٤ رجال قبل ان تستوفوا ديونهم منك فاذا كنت مديوناً لكلٍّ بـ ١٠ ليرات فما مقدار زيادة ثروتك حينئذٍ عما لو كنت دفعت ديونك ؟
(−٤)×(−١٠) = ؟

٥٠ . قسمة الاعداد السلبية والايجابية . اذا كان الطالب قد فهم جيداً الضرب في الاعداد السلبية فالقسمة تصبح بسيطة جداً لان القسمة عكس الضرب

مثالة ٦ × ٥ = ٣٠ و ٣٠ ÷ ٥ = ٦ و ٣٠ ÷ ٦ = ٥

وبما ان ٦ × (−٥) = −٣٠

فاذًا (−٣٠) ÷ (−٥) = ٦

وبما ان (−٦) × (−٥) = ٣٠

فاذًا ٣٠ ÷ (−٥) = −٦

وهاك الاربع حالات في قسمة الاعداد الايجابية والسلبية :

(١) ٣٠ ÷ ٥ = ٦

(٢) (−٣٠) ÷ ٥ = −٦

(٣) ٣٠ ÷ (−٥) = −٦

(٤) (−٣٠) ÷ (−٥) = ٦

نجد علامات المقسوم والمقسوم عليهِ متفقة في الاولى والرابعة حيث علامة الخارج ايجابية ولكن علامات المقسوم والمقسوم عليهِ مختلفة في الثانية والثالثة حيث علامة الخارج ايجابية . وعليهِ نقول :

اذا اتفقت علامتا المقسوم والمقسوم عليهِ كانت علامة الخارج ايجابية واذا اختلفتا كانت سلبية

تمرين

(١) ٢ × (−٨) = ؟ (−٣٤) ÷ ٢ = ؟ (−٣٤) ÷ (−٨) = ؟

(٢) ٥ × (−٩) = ؟ (−٤٥) ÷ ٥ = ؟ (−٤٥) ÷ (−٩) = ؟

(٣) (−٧) × (−٨) = ؟ ٥٦ ÷ (−٧) = ؟ ٥٦ ÷ (−٨) = ؟

(٤) ت × (−ب) = ؟ (−ب ت) + ت = ؟ (−ب ت) + (−ب) = ؟

(٥) كم خارج قسمة : ٢٩ + ٢ ؟ ٢٩ + (−٢) ؟ (−٢٩) + ٢ (−٢٩) + (−٢) ؟

(٦) كم خارج قسمة ٧٢ + ٨ ؟ ٧٢ + (−٨) ؟ (−٧٢) + ٨ ؟ (−٧٢) + (−٨) ؟

(٧) كم خارج قسمة : (−٦٤) + (−٩) ؟ ٩٩ + (−١١) ؟ (−٨١) + (−٩)

٥١ . تمارين مُوقّتة . يجد الطالب في هذا الكتاب تمارين موقتة والغاية منها معرفة عدد الاسئلة السهلة التي يستطيع حلّها في وقت معيّن . فليتمرن عليها ويحسّن نتائجهُ من مرة الى اخرى وليتذكر الامور الآتية :

(١) الضبط التام والدقة لازمتان . السرعة مستحبة ومرغوبة

(٢) لا تنقل التمارين الاّ اذا طلب منك ذلك

(٣) اشتغل على الورق عند اللزوم فقط

(٤) احفظ نتيجة كل تمرين في دفتر خاص وجرّب ان تحسنها

٥٢ . الوسط . يقال للحلّ الصحيح اصابة . ولا بدّ في كل صف من الحصول على عدد من الاصابات عندها يتفق ان يقع عدد التلامذة الذين كانت اصاباتهم اكثر منها قدر عدد الذين كانت اصاباتهم اقل منها . فيدعى هذا العدد من الاصابات متوسط الصف او وسطهُ

مثالهُ : اذا كان عدد اصابات سامي ٣٠ اصابة وكان في صفهِ ٩ ممن كان عدد اصاباتهم اكثر من عدد اصاباتهِ (سامي) و ٩ ممن كان عدد اصاباتهم اقل من عدد اصاباتهِ فالعدد ٣٠ هو متوسط الصف

تنبيه : ليس القصد من التمرين الموقت ان يتمكن احد الطلبة او بعضهم من حل جميع الامثلة في الوقت المعين

تمرين موقت للمباراة

(الوقت دقيقة واحدة)

اجمع ما ياتي :

(١) $\begin{matrix}+٩\\+٨\end{matrix}$ (٢) $\begin{matrix}+٨\\+٩\end{matrix}$ (٣) $\begin{matrix}+٨\\-٩\end{matrix}$ (٤) $\begin{matrix}-٨\\-٩\end{matrix}$ (٥) $\begin{matrix}-٤٨\\+٤٩\end{matrix}$

(٦) $\begin{matrix}-٩\\-٨\end{matrix}$ (٧) $\begin{matrix}+٧\\+٤\end{matrix}$ (٨) $\begin{matrix}+٦\\+٨\end{matrix}$ (٩) $\begin{matrix}+٢\\-٥\end{matrix}$ (١٠) $\begin{matrix}-٢\\-٦\end{matrix}$

(١١) $\begin{matrix}-٤\\+٧\end{matrix}$ (١٢) $\begin{matrix}-٨\\-٥\end{matrix}$ (١٣) $\begin{matrix}-٥\\-٢\end{matrix}$ (١٤) $\begin{matrix}-١\\+٦\end{matrix}$ (١٥) $\begin{matrix}-٢\\-٧\end{matrix}$

(١٦) $\begin{matrix}+٤\\-٩\end{matrix}$ (١٧) $\begin{matrix}+٢\\+٤\end{matrix}$ (١٨) $\begin{matrix}+٦\\+٢\end{matrix}$ (١٩) $\begin{matrix}+٥\\+٢\end{matrix}$ (٢٠) $\begin{matrix}+٦\\+٧\end{matrix}$

(٢١) $\begin{matrix}+١\\-٨\end{matrix}$ (٢٢) $\begin{matrix}-١\\-٧\end{matrix}$ (٢٣) $\begin{matrix}-٢\\+٥\end{matrix}$ (٢٤) $\begin{matrix}-٦\\-٤\end{matrix}$ (٢٥) $\begin{matrix}+٢\\-٧\end{matrix}$

(٢٦) $\begin{matrix}+١\\-٦\end{matrix}$ (٢٧) $\begin{matrix}-٢\\-٢\end{matrix}$ (٢٨) $\begin{matrix}+٤\\-٦\end{matrix}$ (٢٩) $\begin{matrix}+٤\\+٧\end{matrix}$ (٤٠) $\begin{matrix}+٧\\+٢\end{matrix}$

(٤١) $\begin{matrix}+٥\\+١\end{matrix}$ (٤٢) $\begin{matrix}+١\\-٢\end{matrix}$ (٤٣) $\begin{matrix}+٢\\+٢\end{matrix}$ (٤٤) $\begin{matrix}-١\\-١\end{matrix}$ (٤٥) $\begin{matrix}-٢\\+١\end{matrix}$

(متوسط الاصابات ٣٥)

تمرين موقت للمباراة

(الوقت ٣ دقائق)

خذ اعمال التمرين السابق واطرح من الاعداد العالية ما هو دونها . انتبه جيدًا للعلامات

(متوسط الاصابات ٣٧)

تمرين موقت للمباراة

(الوقت دقيقتان)

خذ الاعمال المذكورة سابقًا واضرب الاعداد بعضها في بعض

(متوسط الاصابات ٢٦)

تمرين موقت للمباراة

(الوقت دقيقة واحدة)

اقسم ما يأتي :

(١) $\frac{٢٥}{٥}$ (٢) $\frac{-٢٥}{٥}$ (٣) $\frac{٢٥}{-٥}$ (٤) $\frac{-٢٥}{-٥}$

(٥) $\frac{٢٥}{-٥}$ (٦) $\frac{٢٥}{٧}$ (٧) $\frac{-٢٥}{٧}$ (٨) $\frac{-٤٢}{٧}$

(٩) $\frac{-٤٢}{٦}$ (١٠) $\frac{٤٢}{٧}$ (١١) $\frac{٤٢}{-٦}$ (١٢) $\frac{-٤٠}{-٨}$

(١٣) $\frac{-٤٠}{٢٠}$ (١٤) $\frac{٤٠}{١٠}$ (١٥) $\frac{٦٣}{٩}$ (١٦) $\frac{٦٣}{-٩}$

(١٧) $\frac{٢}{-٧}$ (١٨) $\frac{-٦٣}{٧}$ (١٩) $\frac{-٨١}{٩}$ (٢٠) $\frac{-٨١}{-٩}$

(٢١) $\frac{١}{-٩}$ (٢٢) $\frac{١}{-١}$ (٢٣) $\frac{-١}{-١}$ (٢٤) $\frac{١}{١}$

(٢٥) $\frac{-١}{١}$ (٢٦) $\frac{٦٤}{٨}$ (٢٧) $\frac{٦٤}{-٨}$ (٢٨) $\frac{-٦٤}{-٨}$

(٢٩) $\frac{٧٢}{٩}$ (٣٠) $\frac{-٧٢}{-٩}$ (٣١) $\frac{-٧٢}{٩}$ (٣٢) $\frac{-٧٠٢}{٩}$

(٣٣) $\frac{-٧٢}{-٩}$ (٣٤) $\frac{٧٠٢}{-٩}$ (٣٥) $\frac{٥٧٢}{-٩}$

(متوسط الاصابات ٣٥)

٥٣. خواص الصفر. يمكننا ان نتصور الصفر غير مسبوق بعلامة او مسبوقًا بالعلامتين وهذا يعني

$$\pm\ 0 = 0.$$

ونقرأ "ايجاب او سلب صفر يساوي صفرًا"

وبما ان الصفر لا قيمة له فلا تزيد قيمة العدد اذا اضيف (الصفر) اليه ولا تقل اذا طرح منه اي ان $ت + 0 = ت$ و $ت - 0 = ت$

واذا كررنا الصفر او جمعناه الى نفسه قدر ما نشاء فالمجموع صفر وعليه $ت \times 0 = 0$ ومن المعلوم ان $ب ت = ت ب$ فاذًا $0 \times ت = 0$ ايضًا

واذا عددنا ثلاثة آحاد على المقياس المدرج من الصفر الى اليسار لبلغنا النقطة -٣ فاذًا $0 - ٣ = -٣$

اي جزء كان من الصفر صفر وبكلام آخر جزء الصفر صفر فاذًا $0 + ب = 0$.

ولا معنى للعبارة $ب + 0$ لمخالفتها للمتعارف لان الصفر لا يوجد في العدد كجزء قائم بنفسه ولا يمكن وجدان عدد ما مهما كان كبيرًا وعظيمًا كخارج للقسمة حتى اذا ضربته في الصفر نتج المقسوم ب

فالقسمة على صفر مستثناة في علم الجبر ايضًا ولا يسمح باستعمالها لانها تسبب كثيرًا من المغالطات فضلاً عن عدم انطباقها على القوانين المعروفة والمسلم بها

خذ المغالطة الآتية: $0 \times ٣ = 0$

$0 \times ١٠٠ = 0$

$\therefore 0 \times ٣ = 0 \times ١٠٠$

وبقسمة الجانبين على 0 $٣ = ١٠٠$ وهذا مستحيل

والخواص التي ذكرناها تلخص بما يأتي :

ت + ٠ = ت ٠ − ت = − ت ت × ٠ = ٠

ت − ٠ = ت ٠ × ت = ٠ ٠ + ت = ٠

ت ÷ ٠ لا يجوز استعمالها

تمرين شفهي

(١) ٠ × (−٢) (٢) ٠ × ٢٥ (٣) ٠ + ٢٧

(٤) ٠ − ٤½ (٥) ٠ − ٦⅞ (٦) ٠ × ٢٧

(٧) ٠ + ٩⅛ (٨) ٠ − ٩⅛ (٩) ٠ × ٩⅛

(١٠) ٠ + ٩⅛ (١١) ٠ + ٩⅛ (١٢) ٠ − ٩⅛

(١٣) ٠ + ٧ (١٤) ٠ × ١٢ (١٥) ٠ + ١٢

(١٦) ١ + ١٢ (١٧) ٠ + ١٢ (١٨) ٠ + ١٨

(١٩) ٠ × ٠ (٢٠) ٠ × ٨٠ (٢١) ٠ × ١٥ ^{٢}

(٢٢) ٠ × ٢٢ ^{٢} (٢٣) ٠ × ٢٤ ^{٢} (٢٤) ٠ × ٣ ^{٥}

اسئلة منثورة

اجب ما استطعت شناها

(١) كانت درجة الحرارة احد ايام الصيف :

٩ ق . ظ ٧٢°	١ ب . ظ ٨٣°	٥ ب . ظ ٧٧°	٩ ب . ظ ٧٢
١٠ " " ٧٥	٢ " " ٨٥	٦ " " ٨٠	١٠ " " ٦٧
١١ " " ٧٧	٣ " " ٨٣	٧ " " ٧٩	١١ " " ٦٣
الظهر ٨٠	٤ " " ٧٤	٨ " " ٧٧	نصف الليل ٥٨

ارسم الخط البياني

(٣) كان عدد سكان قريتين كما يأتي :

السنة	١٨٩٠	١٨٩٢	١٨٩٤	١٨٩٦	١٨٩٨	١٩٠٠	١٩٠٢
القرية الاولى	٤٠٨	٤٨٠	٤٢٧	٤٠٢	٤٦٧	٤٢٩	٦٧٤
القرية الثانية	٦١٢	٦٢٧	٥٨٣	٦٢٢	٥٥٠	٥٣٠	٤٨٠

(ب) ارسم الخط البياني لكل قرية على حدة

ت " " " " " ذات الورقة واجعل احد الخطين منقطًا او بحبر احمر لاجل الفرق بين الخطين

ملاحظة خذ عدد السنين على المحور الافقي وعدد السكان على المحور الرأسي

(٤) كم زيادة : ١٧ على ٧ ؟ ١٧ على ك ؟ ك على ١٧ ؟

(٤) كم زيادة : ك على ٩ ؟ ك على ى ؟

(٥) حوّل : غ غرشًا الى ليرات . ى بردًا الى قراريط . س سنتيمترًا الى امتار . س ساعة الى دقائق

(٦) ما نسبة س ساعة الى اليوم ؟ كم جزء من المئة منه ؟

(٧) ثمن ت تفاحة غ غرشًا فكم ثمن التفاحة الواحدة ؟

(٨) الفرق بين عددين ١٢ واحدهما ٣٨ فما الآخر ؟

(٩) الفرق بين عددين ف واحدهما ع فما الآخر ؟

(١٠) ما العدد المزدوج الذي يلي ١٢ ؟

(١١) مطلوب ٣ اعداد زوجية متوالية : اصغرها ١٢ . اكبرها ١٢ . وسطها ١٢

(١٢) ما العدد المفرد الذي يلي ١٥ ؟

(١٣) مطلوب ٣ اعداد فردية متوالية : اصغرها ١٥ . اكبرها ١٥ . وسطها ١٥

(١٤) ما العدد المزدوج الذي يلي ٢ك ؟

(١٥) ك عدد صحيح فهل تكون ٢ك عددًا مفردًا ؟

(١٦) ك عدد صحيح فهل تكون ٢ك + ١ عددًا زوجيًا ؟

(١٧) مطلوب ٣ اعداد زوجية متوالية : اصغرها ٢ك . اكبرها ٢ك . وسطها ٢ك

(١٨) مطلوب ٣ اعداد مفردة متوالية : اصغرها ٢ك + ١ . اكبرها ٢ك + ١ وسطها ٢ك + ١

(١٩) كانت درجة الحرارة — ٤ الساعة ٧ ق . ظ ثم ارتفعت ٥° و ٤° فما الدرجة التي بلغتها ؟

(٢٠) ما المراد بالتاريخ — ٤٥٠ سنة ؟ + ١٩٣٥ ؟ ما الفرق بين التاريخين المذكورين ؟

(٢١) سرعة قارب بخاري في الماء الساكن ٨ اميال في الساعة وسرعة نهر ١٥ في الساعة . فكيف تعبّر عن سرعة القارب اذا صعد في النهر او اذا نزل فيه واستخدمت الاعداد السلبية والايجابية ؟

(٢٢) سارت الباخرة من بيروت نحو الاسكندرية بسرعة ١٥ ميلاً في الساعة وكان احد المسافرين يمشي على ظهرها ذهابًا وايابًا بسرعة ٣ اميال في الساعة فما سرعة اقترابه نحو الاسكندرية اذا كان متجهًا نحو مقدم السفينة ؟ وما سرعته اذا اتجه نحو مؤخرها ؟

(٣٣) كسر قيمته ٤ اضعاف قيمة كسر آخر ومجموعهما ¼ فما الكسران ؟

(٣٤) عدد اربعة اضعاف عدد آخر ومجموعهما ٠٫٠٠٤ فما العددان ؟

(٣٥) اقسم ١٦٠ الى قسمين ليكون احدهما ٣ اضعاف الآخر ؟

(٣٦) اقسم ٤٢٠ الى ٤ اقسام كنسبة ١ و ٢ و ٤

(٣٧) اقسم ٧٦٠٠ الى ٣ اقسام ليكون الثاني ٣ اضعاف الاول والثالث ٥ اضعاف الثاني

(٣٨) مجموع عددين ٢٠٠ واحدهما يزيد ٣ اضعاف الآخر بـ ٣٠ فما العددان ؟

(٣٩) محيط مثلث ٤٨ قدماً والجانب الثاني يزيد الاول بـ ٤ اقدام والثالث يزيد بـ ٨ اقدام فكم يكون كل جانب من جوانبه ؟

(٤٠) ما ثلاثة اعداد مفردة متوالية اذا كان مجموعها ١١١ ؟

(٤١) ثقل المواد الجامدة في الحليب ٣ اضعاف ثقل دهن الزبدة . وثقل المواد السائلة ٧ اضعاف ثقل المواد الجامدة فكم ثقل كل من المواد المذكورة في ٣ قناطير حليب ؟

الفصل الثالث

الجمع والطرح

القسم الاول

٥٣ . اذا جمعنا ٣ ليرات و٤ ليرات فالمجموع ٧ ليرات ومثلة ٣ عشرات و٤ عشرات = ٧ عشرات وعلى ذات المبدإ نجمع

٣ اقلام	٣ × ٩	٣ ل	٣ (ل + ع)
٤ اقلام	٤ × ٩	٤ ل	٤ (ل + ع)
٧ اقلام	٧ × ٩	٧ ل	٧ (ل + ع)

ومما مرّ نستنتج اننا نجمع حدودًا متشابهة اي ما كان ضلعها الحرفي مشتركًا مثل ل او (ل + ع)

٥٤ . الحدود المتشابهة هي الحدود التي تتساوى فيها الحروف وقوات الحروف

مثاله : ٧ ل٢ ع و− ٤ ل٢ ع حدود متشابهة . لماذا ؟

٨ ل٢ ع و− ٥ ل ع٢ حدود غير متشابهة . لماذا ؟

٥٥ . لجمع الحدود المتشابهة نكتب الضلع الحرفي ونجعل معاملهُ مجموع معاملات

الحدود المختلفة وهذا يقال له "اصلاح" الحدود

مثاله : ٤ك٢ + ٣ك٢ – ٥ك٢ = (٤ + ٣ – ٥)ك٢ = ٢ك٢

تمرين شفهي

اجمع سريعًا :

(١) ٥ دزينات / ٩ دزينات

(٢) ٥ ريالات / ٩ ريالات

(٣) ٥ب ع / ٩ب ع

(٤) ٥ك / ٧ك

(٥) ٩ى / ٨ى

(٦) ٣م ن / ٣م ن

(٧) ٤ك ى / ك ى

(٨) ٢٩ك٢ / ١٠ك٢

(٩) ٦ك ى / ٩ك ى

(١٠) ٨ × ٦ / ٨ × ٩

(١١) ٩ك / –٣ك

(١٢) ٥ك٢س٢ / ٤ك٢س٢

(١٣) –٨ل م / ٤ل م

(١٤) ٨ك٢ / –٣ك٢

(١٥) ١٣ك ى / –٨ك ى

(١٦) $-٨ك$ / $-٦ك$

(١٧) $-٥ل م$ / $-٧ل م$

(١٨) ٣ ليمونات / ٤ ليمونات / -٢ ليمونات

(١٩) $-٨م^{٢}ن$ / $-٤م^{٢}ن$ / $-٢م^{٢}ن$

(٢٠) ٢ى / ٥ى / -١٢ى

(٢١) $٤٢(ب+ت)$ / $٢٢(ب+ت)$

(٢٢) $٢٢(م-١)$ / $١٤(م-١)$

(٢٣) $٢٩(م^{٢}ل-ح)$ / $-١٣(م^{٢}ل-ح)$

٥٦ . الجمع . اذا طلب منا ان نجمع عددًا من العبارات الجبرية فاننا نتبع الترتيب الآتي :

ب . نضع العبارات في صفوف حتى تقع الحدود المتشابهة في عمود واحد

ت . ثم نصلح اي نضم مسميات العمود الواحد الى بعضها

مثاله : اجمع $٤ك^{٢}+٣ك+٢$ و $٣ك^{٢}-٤ك-٣$ و $-٢ك^{٢}-ك-٥$

ضع العبارات صفوفًا واجعل الحدود المتشابهة تقع في ذات العمود ثم اصلح

$$\begin{array}{r} ٤ك^{٢}+٣ك+٢ \\ ٣ك^{٢}-٤ك-٣ \\ -٢ك^{٢}-ك-٥ \\ \hline ٥ك^{٢}-٢ك-٦ \end{array}$$

تنبيه : امتحن العمل بجمع المسميات عكس الطريقة التي جمعتها بها قبلاً

تمرين

اجمع ما يأتي :

(١) ت – ٢ب و٣ت + ٤ب وت + ٥ب و– ٣ت – ٥ب

(٢) ٣ك^{٢} + ى^{٢} و٢ك^{٢} – ٧ى^{٢} و– ٤ك^{٢} – ٥ى^{٢}

(٣) ٣ت ك^{٢} – ٥ب ى^{٢} و٢ت ك^{٢} + ٤ب ى^{٢} و٣ب ى^{٢} – ٤ت ك^{٢}

(٤) ك + ى + ص وك + ٣ص – ٢ى و٣ك + ٤ى – ٧ص

(٥) ٢ك + ٥ى – ص و٣ك – ٨ى + ٦ص وك – ى – ص

(٦) ٣ك + ٥ى و٤ك – ٧ى + ٦ص و٣ك – ٣ى – ٣ص

(٧) ٧ك – ى + ٣ص و٥ك – ٤ى و٢ك + ٦ى – ٥ص

(٨) ٤ك – ٣ى – ٥ص و٦ى – ٢ص و٧ك – ٦ى – ٤ص

(٩) ك + ٢ص + ٣ى وى – ٣ص + ك وص – ٢ك – ٤ى

(١٠) ٥ك – ى + ٣ص و٢ى – ١١ص + ك و٩ص – ٧ى

(١١) ٨ت – ٧ب – ٦ى و٥ى – ٤ت – ٣ب و٣ب + ٧ى

(١٢) ٩ت ى – ب ى و٨ت ب – ٤ت ى و– ١٢ت ب – ت ى

ابسط ما يأتي وذلك بجمع الحدود المتشابهة :

(١٣) ك^{٢} – ك ى + ٣ى^{٢} + ٢ك^{٢} + ٢ك ى – ٢ى^{٢} + ك^{٢} + ى^{٢} + ٣ك^{٢} – ك ى

(١٤) ٣ن – ٣ن^{٢} + م^{٢} + ٢ن^{٢} – ٣٣ن + م^{٢} – ن^{٢} + ٣٣ن – ٣م^{٢}

(١٥) $ك^٢ + ى^٢ - ٢ص^٢ + ٣ك^٢ - ى^٢ + ٢ص^٢ + ص^٢ - ٢ك^٢ + ك^٢ - ص^٢$

(١٦) $٢ك^٢ - كى + ٥كى - ٥ى^٢ + ٣ى^٢ - ٣ك^٢ + ك^٢ + ٢ى^٢ - ٢كى$

(١٧) $٧ت^٢ - ١٣ب^٢ + ١٢ى^٢ + ١٥ب^٢ - ت^٢ - ٧ى^٢ + ٣ب^٢ + ٥ى^٢$

(١٨) $ك^٢ - ٢كى + ى^٢ - ٤كى - ٤ك^٢ - ى^٢ - ١٦ك^٢ - ٨كى + ى^٢ + ى^٢$

(١٩) $٥بت - ت^٢ + ب^٢ - ٤بت - ٩ب^٢ + ٥ت^٢ - ٢بت + ٢ب^٢$

(٢٠) $٣ك^٢ - ٦ك + ١١ - ٤ك - ى - ٣ك^٢ + ٥ك - ١٦ + ١٣ك$

٥٧. ملاحظات. (١) الحدود المتشابهة تجمع وتضم فتجعل حدًا واحدًا باصلاحها اي بجمع مسمياتها كما رأيت

(٢) لا يمكن جمع الحدود الغير المتشابهة وجعلها حدًا واحدًا ولكنها تربط وتجعل عبارة او مقدارًا جبريًا

مثاله مجموع ٢ب و٤ك يكتب ٢ب + ٤ك

(٣) جرت العادة ان نرتب الحدود حسب درجاتها وذلك اما صاعدة او نازلة بالنظر الى حرف خاص

الطرح

٥٨. كما ان ٩ ليرات − ٥ ليرات = ٤ ليرات هكذا ٩ل − ٥ل = ٤ل

وكما ان ٩ عشرات − ٥ عشرات = ٤ عشرات هكذا ٩ع − ٥ع = ٤ع

اي اننا نطرح حدًّا من حدٍّ آخر مشابه له بطرح المسميات وجعل الباقي مسمًّى للضلع الحرفي

مثالة : ٩ ك – ٥ ك = ٤ ك فالمسمّى ٤ هو باقي طرح المسمى ٥ من المسمى ٩

لاحظ جيدًا امثلة الطرح الآتية وامتحنها بجمع المطروح الى الباقي :

٨ ليرات	٨ ل	٨ (ب + ت)	٨ ب٢ ت٢
٣ ليرات	٣ ل	٣ (ب + ت)	٣ ب٢ ت٢
٥ ليرات	٥ ل	٥ (ب + ت)	٥ ب٢ ت٢

لاحظ جيدًا امثلة الطرح الآتية وانتبه للعلامات

– ٨	– ٨	٨	– ٨ م	– ٨ م
– ٣	٣	– ٣	– ٣ م	٣ م
– ٥	– ١١	١١	– ٥ م	– ١١ م

تذكّر ان احسن طريقة للطرح وخصوصًا في الاعداد السلبية هي ان تفكر لتجد العدد الذي اذا جمعتهُ الى المطروح تنج المطروح منهُ

ففي (– ٨) – (– ٣) العدد الذى يجب جمعهُ الى – ٣ ليكون المجموع – ٨ هو – ٥

وهذا يثبت صحة المبدإ المشهور انهُ اذا اردت ان تطرح فغيّر علامات المطروح واجمع وليكن التغيير في الذهن وليس كتابة

تمرين شفهي

ماذا تضيف الى المطروح ليكون المجموع معادلاً المطروح منه في ما يأتي :

٧	٧	٧ك	٧ك	٧ ى	٧ ت
٢	-٣	٢ك	-٢ك	-٢ى	-٢ت

١٢ك ى	٩ك	٨ك^{٢}	٨ك^{٢}	٧ب ت^{٢} ٩ غروش
٢ك ى	-٣ك	ك^{٢}	٤ك^{٢}	-٤ب ت^{٢} -٢ غروش

٩غ	٧ك	١٢ك^{٢}	٨م	٢م ١٢ك
-٢غ	-٤ك	-٧ ك^{٢}	-٢م	-٨م -٥ ك

٥ك	٢٢م	٤م	-٧د	-٢ى -٢ك ى
-١٢ك	-٤ م	-٢٢م	٢د	٤ى ٤ك ى

-٥ت	-٢	-٢م^{٢}	-٢ى	-٧ج -٥ب ت
٢ت	٥	٥م^{٢}	-٢ى	-٤ج -٢ب ت

-٦ك^{٢}	-ل	-٢	-١٦ن^{٢}	٨ب ت ٦ب^{٢}ت^{٢}
-ك^{٢}	-٥ل	-١٢	-٢ن^{٢}	٢ب ت -٤ب^{٢}ت^{٢}

تمرين

اجب ما استطعت شفاهًا

اطرح واختصر ما يأتي :

(١) ٢١م − ١٥م

(٢) −٢٧ت − ١٢ت

(٣) −٧م٢ن٢ − م٢ن٢

(٤) −١١ق − ٤٤ق

(٥) −٥٢ل − −١٨ل

(٦) ٤٣ب ت − ٧ب ت

(٧) −٩ب ت ى − −٤ب ت ى

(٨) −٨ب ت٢ − ١٤ب ت٢

(٩) −م٢ل٢ − م٢ل٢

(١٠) ٥٧ك٢ − ٢٤ك٢

(١١) ٦ قر ٧ ذر − ٢ قر ٢ ذر

(١٢) ٦ ق ٧ ذر + ٢ ق ٧ ذر

(١٣) ٢م٢ − ٤م + ٣م٢ + ٣م

(١٤) ب + ٢ − ب + ٢

(١٥) ب − ٤ − ب − ٢

(١٦) ٢ب − ٢ − ٢ب + ٥

(١٧) ٢ب + ٧ − ٤ب − ٩

(١٨) ٤ب − ٢ − ٤ب

(١٩) ٢ب ت − ٥ ث
٥ ث

(٢٠) ٣ك٢ − ٥
ك٢ + ٦

(٢١) ٢ك − ٢ى + ص
ك − ٢ى + ٣ص

(٢٢) ٤ك − ٥ى + ٣ص
٤ك − ٨ى − ٢ص

(٢٣) ٤ب − ت + ٢ى
٣ب − ٢ت

(٢٤) ٥ك٢ + ٤ك − ٣
ك٢ − ٣ك + ٥

(٢٥) ٣ب٢ + ٥ب ت − ٥ت٢
٤ب٢ + ٢ب ت + ت٢

(٢٦) ٣ك٢ − ٢ك + ٥
٥ك٢ − ٣ك − ١

رتّب واطرح :

(٢٧) ١٥ − ٤ك − ٥ك٢ من ٧ − ٣ك + ٢ك٢

(٢٨) ك − ٢ى + ٣ص من ٢ك − ٢ى + ص

(٢٩) ٤ك − ٨ى − ٢ص من ٤ك − ٥ى + ٣ص

(٣٠) ٣ب − ٢ت من ٤ب − ت + ٢ى

(٣١) ٥ب − ٤ت − ٣ث من ٣ب − ٥ت

(٣٢) ب − ك − ى من ب − ك + ى

(٣٣) ٣ب − ٢ت − ث من ٤ب − ت + ٥ث

(٣٤) ٢ب − ٢ت − ٢ث من ب − ٣ت

(٣٥) ب + ت − ث من ث − د + ح

(٣٦) ٢ك^{٢}ى – ٣ك ى^{٢} من ى^{٢}ك + ى ك^{٢} + ل

(٣٧) ب – ٢ث من ٣ب + ٢ث (٣٨) ٢ من ك – ١

(٣٩) ك – ٢ من ٣ (٤٠) ٤ك^{٢} – ٤ من ٥ ك^{٢} – ٢ك^{٢} + ٢ك

(٤١) ص – ٣ك من ٦ك + ٢ى

تمرين موقت

الوقت دقيقتان

اجمع ما يأتي:

(١) ٧ك / ٣ك

(٢) –٥ب / ٢ب

(٣) ٨ى / –٧ى

(٤) –٥م / –٣م

(٥) ٧ك ى / –٩ك ى

(٦) ١٥ك^{٢} / ٢٢ك^{٢}

(٧) –٢٣ى^{٢} / –١٢ى^{٢}

(٨) ٢٧م / –٣٠م

(٩) –١٤ب^{٢} / –٥٧ب^{٢}

(١٠) –٨١ب ت / –٤٣ب ت

(١١) ٤١ب^{٢}ت^{٢} / ٤٨ب^{٢}ت^{٢}

(١٢) ٧٢ ب ت / –٤٩ب ت

(١٣) –١٧م ل / ٥٣م ل

(١٤) –٥٣ب^{٢}ت^{٢} / –١٧ب^{٢}ت^{٢}

(١٥) ٦٣ ل م ن / –٨١ ل م ن

(١٦) $-٣(ك+ى)$ $٢(ك+ى)$ (١٧) $-٥(ل+م)$ $٥(ل+م)$ (١٨) $-٧(م+ن)$ $-٥(م+ن)$

(١٩) $٤(ب+ت)$ $٦(ب+ت)$ (٢٠) $-٣(ل+م)$ $-٨(ل+م)$

متوسط الاصابات في هذا التمرين ١٤

تمرين موقت

غيّر في التمرين السابق العلامات السلبية الى ايجابية والايجابية الى سلبية ثم اجمع كما فعلت قبلاً

تنبيه : الوقت والمتوسط كما في التمرين السابق

تمرين موقت

الوقت ٢ دقائق

خذ الاسئلة في التمرينين السابقين واطرح العدد الاسفل مما فوقه

متوسط الاصابات ١٨

الاقواس والحواصر

٥٩. نستعمل الاقواس والحواصر في الجبر كما نستعملها في الحساب للدلالة على انه يجب ان تعامل الكميات التي تقع ضمنها ككمية واحدة

ففي الحساب ٦ × (٤ + ٥) تدل على ان مجموع ٤ و٥ اي ٩ مضروب في ٦ . وهكذا في الجبر فان ٢ (٣ ب − ٢ ت + ج) يراد بها ان الكميات داخل القوسين مضروبة في ٢

ونعلم ان المراد من ١٥ + − (٧ + ٥) اننا نطرح مجموع ٧ و٥ من ١٥ وهكذا في الجبر فانّ ١٧ ت − (٣ ب + ت + ٥) يراد بها ان نطرح العبارة ٣ ب + ت + ٥ من ١٧ ت

فاذا وجد اثناء الجمع والطرح كميات محصورة بالاقواس وجب ازالتها اولاً قبل اتمام العمليات المذكورة ثم ننظر اذا كانت القوس مسبوقة بالعلامة "+" ام بالعلامة "−" فاذا كانت مسبوقة بـ "+" نزعنا الاقواس فقط وابقينا الكميات كما كانت عليه ولكن اذا كانت مسبوقة بـ "−" فاننا نتزعها ونغيّر العلامات فنجعل الايجاب سلبًا والسلب ايجابًا ثم نصلح العبارات بضم الحدود المتشابهة

مثالة : ١٧ ت − (٣ ب + ٧ ت − ٥) = ١٧ ت − ٣ ب − ٧ ت + ٥

= ١٠ ت − ٣ ب + ٥

٦٠ . منعًا للالتباس نستخدم اشكالاً مختلفة من الاقواس مثل { } و [ ] و | و —— وهلمّ جرًا وذلك متى اردنا ادخال كمية ضمن كمية اخرى نظير ٨ ك + ى − [٣ ك + (٣ ك − ى)] وهذه الكمية نبسطها كما يأتي :

٨ ك + ى − [٣ ك + (٣ ك − ى)] = ٨ ك + ى − [٣ ك + ٣ ك − ى]

= ٨ ك + ى − ٣ ك − ٣ ك + ى

= ٣ ك + ٢ ى وهو الجواب

ملاحظة : انزع الاقواس الداخلية اولاً

ابسط ما يأتي :

(١) (ب+ت)+ث (٢) ب+(ت+ث)

(٣) ب-(ت+ث) (٤) ب-(ت-ث)

(٥) ب-(-ت+ث) (٦) ب-(-ت-ث)

(٧) ب+(ك-ى) (٨) ب-(ك-ى)

(٩) ب-(٢ت-٣ث) (١٠) ك+(٢ك-١)

(١١) ك-(٢ك+١) (١٢) ك-(٢ك-١)

(١٣) ٢ك-(٢ك-٣) (١٤) ٥ك-(٣ك+٥)

(١٥) ك-(-ك-٢) (١٦) ٧ك^{٢}-(١-٣ك^{٢})

(١٧) ٥ك+[١-(٢-٤ك)] (١٨) ١١ب-(٤ب-٩ب)

(١٩) ب^{٢}-[ب^{٢}-(ب^{٢}-١)] (٢٠) ك+٢ى-(٢ك-ى)

(٢١) ك-[٢ك+(ك-١)] (٢٢) ٢ك-[-ك-(ك-١)]

(٢٣) ٢ى+[-ك-(٢ى-ك)]

(٢٤) ب+[٢ب-(٣ب-٢ت)]+(٣ب-٢ت)

(٢٥) ٣ب+٢ت+٥ث مطروحة من ٧ب-٦ت

(٢٦) ك^{٢}+٢ك+١ مطروحة من ٣ك^{٢}-٢ك-٥

(٢٧) مجموع كوى مطروح من فرقهما

(٢٨) ب^{٢}-٢ب ت+ت^{٢} مطروحة من ب^{٢}+٣ب ت+٦ت^{٢}

(٢٩) ك^{٢}-٥ك+٦ مطروحة من ٤-٨ك^{٢}

(٣٠) ك^{٢}-٤ك ى+٤ى^{٢} مطروحة من ك^{٢}+٤ك ى+٤ي^{٢}

مسائل منثورة

(١) كيف تجد حجم الغرفة ؟ العلبة او الصندوق ؟ عبّر عن ذلك بلغة جبرية ما هو القانون الرمزي العام ؟

(٢) استخدم القانون ح = ط ع ر وجد حجم غرفة طولها ١٢ ذراعاً وعرضها ٨ وارتفاعها ٦

(٣) استخدم القانون وجد حجم صندوق طوله ٩٠ سنتيمتراً وعرضه ٥٠ وارتفاعه ٤٠

(٤) حجم حوض ماء قائم الزوايا ٥٦٠ قدماً مكعبة طوله ١٦ قدماً وعرضه ١٤ فكم عمقه ؟ استخدم القانون

(٥) اكتب القانون لمعرفة فائدة رأس مال معيّن لعدد من السنين على معدل معيّن (الفائدة بسيطة)

(٦) في قانون الفائدة ف = ر س م ماذا تمثل ف ؟ ر ؟ س ؟ م ؟

(٧) استخدم القانون لمعرفة المعدل اذا كان رأس المال ١٥٠٠ ليرة والوقت ٦ سنين والفائدة ٤٥٠ ليرة

(٨) اذا كانت سرعة القطار ٥٠ ميلاً في الساعة فكم تكون سرعته في ٧ ساعات ؟ في س ساعة ؟

(٩) اذا كانت سرعة السيارة م ميلاً في الساعة فكم تكون سرعتها في س ساعة ؟

(١٠) خذ احدى قطع العملة او اي شيء آخر مستدير وقس قطره ثم احسبه

يدور على حرفه على قطعة ورق (او سطح مستوٍ) وعيّن طول محيطه اقسم طول المحيط على القطر لتجد نسبة الواحد الى الآخر

(١١) كم طول نصف القطر الذي وجدته ؟ ما القانون الذي يحدد العلاقة بين المحيط ونصف القطر حسب الارقام التي استخرجتها ؟ قابل ذلك مع م = ٢ X ب ش حيث محيط الدائرة وب نسبة المحيط الى القطر (٢٢/٧) وش شعاع الدائرة او نصف قطرها

القسم الثاني

٦١. الجمع هو في الجبر كما في الحساب عبارة عن ضم عدة كميات وجعلها كمية واحدة

وافضل طريقة للجمع هي ان ترتب الكميات صفوفاً وتكتب الحدود المتشابهة في عمود واحد ثم تجمع كما مرّ بك

ولا تنسَ ان ترتب الكميات حسب قوة حرف خاص وذلك اما صاعداً او نازلاً

والجمع في الجبر يشبه جمع الاعداد المركبة في الحساب كما ترى من المثال الآتي :

٢ ثا . ٧ د ق . ٢ سا .	٢ ث + ٧ د + ٢ س
٥ ثا . ٢ د ق . ٣ سا .	٥ ث + ٢ د + ٣ س
٨ ثا . ٩ د ق . ٥ سا .	٨ ث + ٩ د + ٥ س

٦٢. امتحان الجمع . يمتحن الجمع عادة بمراجعة العمل عكس الطريقة التي

جرينا عليها قبلاً اي اذا كنا جمعنا من الاعلى الى الادنى ففي الامتحان نجمع من الادنى الى الاعلى ولكن يوجد طريقة بسيطة لكشف الخطإ وهي ان يعوض عن الحروف بقيم خصوصية يختارها الطالب حسب ارادته واسهلها ان تجعل قيمة كل حرف أ (واحداً) كما ترى في المثال الآتي :

العملية	الامتحان
٣ك + ٢ى – ٧ ص	٣ + ٢ – ٧ = –٢
٥ك – ٨ى – ص	٥ – ٨ – ١ = –٤
٤ك + ٣ى + ٩ ص	٤ + ٣ + ٩ = ١٦
١٢ك – ٣ى + ص	١٢ – ٣ + ١ = ١٠

ففي المثال اعلاهُ عوضنا عن الحروف ك وى وص بـ ١ ووجدنا النتيجة ١٠ في الحالتين وهذا يُدل على صحة الجواب

تنبيه : طريقة التعويض ليست عامة مطلقة لانهُ قد يتفق (ولو كان ذلك اندر من النادر) وقوع خطأين او اكثر متعاكسين فيبطل احدهما عمل الآخر

تمرين

اجمع وامتحن ما يأتي :

(١) ٢ب – ٣ت
٣ب – ٢ت
٥ب + ٥ت

(٢) ٣(ب + ت)
٤(ب + ت)
–٤(ب + ت)

(٣) –٦(ك – ى)
٤(ك – ى)
–٥(ك – ى)

(٤) ٥ب + ك
−٦ب + ك
٢ب + ك

(٥) ٦ك + ٣ى + ٧ص
٣ك − ٩ى − ٢ص
٤ك + ٣ى − ٥ص

(٦) ٦ب − ٢ت + ٣ث
٥ب − ٨ت − ٣ث
−٤ب + ٧ت + ٥ث

(٧) ٣ك٢ − ٢ك + ٥
٥ك٢ − ١٢ك + ١٠
−٣ك٢ + ٢٢ك − ١٠

(٨) ٢ب + ٣ت + ٤ث
٥ب − ٦ت − ٧ث
٤ب + ٥ت + ٨ث
٢ب − ٥ت − ٢ث

(٩) ٦ب − ١٥ت − ١٠ث
٤ب + ٨ت + ١٥ث
ب + ٧ت − ٣ث
٢ب + ٥ت − ٧ث

(١٠) ٦ل + ٣م + ٧ك
−١٢ل − ١٥م − ٥ك
٥ل + ٣م − ٦ك
٧ل + ٨م − ٣ك

(١١) (٢ب + ٣ت)ل
(٥ب − ٢ت)ل
(−٣ب + ٤ت)ل

(١٢) ٥ (ب٢ − ت٢)
٤ب (ب٢ − ت٢)
−٦ت (ب٢ − ت٢)

(١٣) ب ك + ب ك٢
−ت ك + ت ك٢
ث ك − ٣ث ك٢

(١٤) ٧ك + ى + ٥ ص - ١٠ ك ى + ٢ ى - ٢ ص + ١٢ ك ى - ٤ ك ص + ٥ ص - ٦ ك - ٤ ك ص + ٢ ك ى - ٢ ى + ٩ ص + ٧ ك - ك ص + ٢١ ك ص - ١٦ ص + ك - ٥ ك ى

(١٥) ك٢ + ٢ ك٢ ى + ٢ ك ى٢ + ى٢ + ك٢ - ٢ ك٢ ى + ٢ ك ى٢ - ى٢ + ٢ ك٢ ى٥ - ٢ ك ى٢ + ى٢ + ك٢ - ى٢ + ٢ ك٢ ى - ٤ ك٢ - ك ى٢ - ى٢ + ى٢ + ك٢ - ك٢ ى + ك ى٢

(١٦) ٢ ب٢ ت - ٢ ب٢ ث + ٢ ب٢ - ٥ ب٢ ت - ب٢ - ٢ ب٢ س + ب٢ ت + ٦ ب٢ ث - ٢ ب٢

(١٧) ٥ ك٢ - ٢ ك + ٤ - ٢ ك٢ - ٦ ك٢ + ٤ ك - ٧ - ك٢ + ك٢ + ٢ ك٢ - ك + ٥ + ٢ ك٢ - ٦ ك - ك٢ + ٤ ك - ٢ ك٢ + ٢ ك

٦٣. درجة الحدّ. درسنا قبلاً ان ب٢ = ب × ب × ب وان العدد ٢ تدل على القوة اي على عدد المرات التي ضربت ب بنفسها او أُخذت كضلع ولذلك سميت دليلاً. وعليهِ نقول ان ب٢ حدٌّ من الدرجة الثالثة. وفي ب٢ ك٢ نقول ان درجة الحد ٢ بالنظر الى ب و٢ بالنظر الى ك

وبما ان ب٢ ك٢ = ب . ب . ب . ك . ك فالحدّ له خمسة اضلاع فدرجته اذًا بالنظر الى ب وك معًا ٥ اي انهُ من الدرجة الخامسة

دليل الحرف يدل على درجتهِ

تنبيه: تذكر ان ب = ب١

ومجموع دلائل الحروف في الحدّ الواحد يدل على درجة الحد

فاذًا درجة الحد هي مجموع دلائل حروفهِ فقط

مثالة : درجة $ك^{٥}ى^{٢}$ $+٥+٢$او ٨ ودرجة $٧ب ت^{٢}م^{٥}$ $١+٢+٥$او ٩ فدرجة $ك^{٥}ى^{٢}$ الثامنة ودرجة $٧ب ت^{٢}م^{٥}$ التاسعة

٦٤ . درجة الكمية المركبة . الكمية المركبة تتألف من حدين او اكثر ودرجتها هي اعظم درجة حدٍ فيها فدرجة $ك^{٥}+٧ك^{٢}-٣$ هي الخامسة لان درجة اعظم حدٍ فيها اي $ك^{٥}$ هي الخامسة ودرجة $ك^{٤}ى^{٢}-ك^{٢}ى^{٢}+ى$ هي السابعة لان درجة اعظم حدٍ فيها اي $ك^{٤}ى^{٢}$ هي السابعة

والجواب على الاسئلة الآتية يظهر جلياً ما المراد بدرجة الكمية

١ . ما درجة $ك^{٤}-٩ك^{٢}+ك^{٥}$ ؟

٢ . ما درجة $ك^{٤}ى-٧ك ى^{٢}+ك ى^{٤}$ ؟ ما درجتها بالنظر الى ك ؟ بالنظر الى ى ؟

٣ . ما قيمة ن لتكون درجة الكمية الثنائية $ك^{ن}ى-ك ى^{ن+١}$ الثامنة ؟ لتكون درجتها الثامنة بالنظر الى ك ؟ بالنظر الى ى ؟

٦٥ . ترتيب الكمية المركبة . مرّ بنا انهُ يستنسب ترتيب الاحرف في الحد الواحد حسب نظام ورودها في احرف الهجاء ونزيد الآن انهُ يستنسب ترتيب الكمية بالنظر الى درجة حرف خاص فنضع الحد الذي يشتمل اعظم درجة لذلك الحرف اولاً ثم ما يليهِ ثانياً وهلمَّ جرًّا وهذا يعرف بالترتيب النازل . ويمكن لنا ان نعكس الترتيب المشار اليهِ فنضع الحد الذي يشتمل اقل درجة للحرف المذكور اولاً وما يليهِ ثانياً وهلمَّ جرًّا وهذا يعرف بالترتيب الصاعد . والقصد منهُ سهولة العمل وتوفير الوقت وتجنب الوقوع في الخطإ

مثالة : $ك^{٢} - ٢ك^{٢}ى + ٢ك ى^{٢} - ى^{٢}$ مرتبة ترتيباً نازلاً بالنظر الى الحرف ك وصاعداً بالنظر الى الحرف ى . او مرتبة باعتبار قوة ك "المتناقصة" وقوة ى "المتزايدة"

تمرين

اجب ما استطعت شفاهاً

ما درجة الحدود الآتية ؟ وما درجتها بالنظر الى كل حرف فيها :

$ب^{٧}$ ، $ت^{٩}$ ، $-ب^{٤}$ ، $-ك^{٨}$ ، $ب^{٢}ت^{٥}$ ، $ب^{٥}ت^{٢}$ ، $ب^{٢}ت^{٢}ث$

$ب ت^{٢}ث^{٢}$ ، $٥ك^{٧}ل^{٢}م$ ، $١٧ب^{١٠}ك^{٤}ى^{٢}$

ما درجة الكميات الآتية :

(١) $ك^{٤} - ٢ك^{٢}ى + ى^{٢}$ ، (٢) $٣ك^{٢} + ٧ك ى - ى^{٢}$ ،

(٣) $\frac{١}{٢}ك^{٥} - ١$ ، (٤) $٧٢ك^{٢}ى^{٢} - ٤ك ى + ٢$ ،

رتب الكميات الآتية بالنظر الى قوة ك النازلة واجمع ثم امتحن بالتعويض عن $ك = ٢$ و $ى = ٣$

(٥) $ك^{٢} + ى^{٢} + ٢ك^{٢} - ك ى و - ٣ك ى + ٧ك^{٢} - ى^{٢} + ك^{٢}$

(٦) $ك ى^{٢} + ك^{٤} + ك^{٢}ى - ك^{٢} + ى^{٢} و ى^{٤} + ى^{٢} - ك ى^{٢} + ٢ك^{٤}$

٦٦ . الطرح . عبارة عن وجدان عدد يقال له الباقي اذا ضمّ الى المطروح نتج المطروح منه

مثالة : اذا طرحنا $٤ب ت$ من $٩ب ت$ كان الباقي $٥ب ت$. لان $٥ب ت$ و $٤ب ت$ (المطروح) تساوي $٩ب ت$ المطروح منه

ولاجل سهولة العمل يشترط في طرح الكميات المركبة ان ترتب اولاً صاعداً او نازلاً حسب قوة حرف خاص

مثالة : اطرح $-٧ك ى + ك^{٢} + ٧ ى^{٢}$ من $ى^{٢} + ٣ك^{٢} - ٤ك ى$ وامتحن العمل بالتعويض عن $ك = ٣ و ى = ٢$

العملية	الامتحان
$٣ك^{٢} - ٤ك ى + ى^{٢}$	$٧ = ٤ + ٢٤ - ٢٧$
$ك^{٢} - ٧ك ى + ٧ى^{٢}$	$-٥ = -٣٨ + ٤٢ - ٩$
$٢ك^{٢} + ٣ك ى - ٦ى^{٢}$	$١٢ = ٢٤ - ١٨ + ١٨$

تمرين

رتب واطرح وامتحن ما يأتي :

(١) $٥(ب + ت)$ $٤(ب + ت)$

(٢) $٩(ك + ى)$ $-٤(ك + ى)$

(٣) $٧ب + ك$ $-٣ب + ك$

(٤) $-٨ب - ى$ $٣ب - ى$

(٥) $\frac{٣}{٤}ك^{٢} - \frac{١}{٤}ى^{٢}$ $ك^{٢} - \frac{١}{٢}ى^{٢}$

(٦) $(٥ب - ت)ك$ $(٣ب - ٢ت)ك$

(٧) $ب(ك + ى)$ $ت(ك + ى)$

(٨) ١٥ (ك + ى) − ١١ (ك + ى)

(٩) (−٣ب + ت) ك (−٣ب − ت) ك

(١٠) ٣ك٢ − ٣ى٢ + ك ى من −٥ك ى + ى٢ − ٣ك٢

(١١) م٢ − ١ + ٣م من ٤ − م + ٧م٢

(١٢) ك٢ ى٢ + ب٢ ت٢ − ك ى من ب٢ ت٢ + ك٢ ى٢ + ٩ك ى

(١٣) ك٢ − ك٤ + ٣ك − ١٧ من ٢٧ + ك٣ − ك٤ + ٣ك + ٣ك٢

(١٤) ١ + م٢ − م٣ + م٤ − ٣م من ٣م٤ + ٣ − ٧م٣ + ٣م − م٢

(١٥) ٨م٢ + ٣م٤ − ٣م + ٣م٢ − ١٧ من ١ − ٧م٣ + ٣م + ٣م٤

(١٦) ماذا تضيف الى ٤ب٢ − ٤ب ث + ٤ث٢ لينتج ٣ب٢ + ٤ب ث + ٣ث٢ ؟

اذا كانت ب = م٢ − ٣م٣ + ١ و ت = ٣م٢ − ٥م − ٣ و ث = ٣م٢ + م٢ + ٣م فما قيمة :

(١٧) ب + ت + ث ؟ (١٨) ت − ب + ث ؟

(١٩) ب + ت − ث ؟ (٢٠) ب − ت + ث ؟

٦٧. دلالة العلامتين "+" و"−". للعلامتين + و − دلالتان. **الاولى** للدلالة على العمل (اي الجمع والطرح) والثانية للدلالة على النوع او الماهية (اي الايجاب والسلب). ومع ذلك لا يقع التباس لانها جميعها خاضعة لذات القوانين

مثاله: ٩ − (ب − ٤) فعلامة السلب التي تسبق القوس يراد بها عملية الطرح اي ان الكمية المحصورة يجب طرحها من ٩ فالعلامة اذًا للدلالة على العمل. ولكن العلامة التي هي داخل القوس قد يمكن ان تكون للدلالة على العمل اي الطرح او للدلالة على النوع اي ان ٤ كمية سلبية مجموعة الى ب

٦٨ . ادخال الحواصر ونزعها . ذكرنا سابقًا ان الحواصر تستعمل للدلالة على ان الكميات التي داخلها مرتبطة معًا ويجب ان تعامل ككمية واحدة . وذكرنا ايضًا انه اذا كانت الكمية مسبوقة بالعلامة "+" فانه يمكن رفع الحواصر (نزعها) وابقاء وضع الكمية على ما كان عليه قبلاً دون تغيير قيمتها اما اذا كانت مسبوقة بعلامة "−" فانه لا يمكن رفع الحواصر مع ابقاء القيمة ما لم تتغير علامات كل حدٍّ من حدودها فالايجاب يصبح سلبًا والسلب ايجابًا . واذا تذكرنا هذه المبادىء سهل علينا العمل وهان الامر

اذا اردنا ان نحصر كمية فاننا ندخل الحواصر وهذا عكس نزعها وعليه ننظر اذا كانت الحواصر مسبوقة بعلامة "+" ام بعلامة "−"

فاذا كانت مسبوقة بعلامة "+" بقيت اجزاء الكمية المحصورة على وضعها السابق دون تغيير قيمتها اما اذا كانت مسبوقة بعلامة "−" فانه لا يمكن وضع الحواصر مع ابقاء القيمة ما لم تتغير علامات كل حدٍّ من حدودها

مثاله : ب − ت + ث + د − س = ب − ت + (ث + د − س)

او ب − ت − (− ث − د + س)

تمرين

ابسط ما يأتي :

(١) ٧ ت − (٥ − ٤ ت) (٢) ٩ ت − (− ٣ ت − ٢)

(٣) ٦ ر − (− س − ٢ ر) (٤) ٩ ق − [٣ ق − ١)

(٥) ١٠ م − { − ٣ ن + ٥ م } (٦) [٤ س + ٣ د] − [٢ س − د]

(٧) [ك - ى] - [٢ى - ك] (٨) (٥ك - ٨) - (٣ك + ٤)

(٩) ١٨ - [٣ك + (ك - ٧)] (١٠) ٣ك + [٧ك - (٣ك + ١)]

(١١) ٩ى + [٣ى - (٨ى - ٤)]

(١٢) ١١ص + [- ٤ص + (٣ص - ٥)]

(١٣) ٦م + [- ١٥ - (٣م - ٩)] (١٤) ١٢ - [٦ك + (٤ - ٥ك)]

(١٥) ٤م - [٣م - (٣م + ١)] (١٦) ٦ل - {٤ - (٥ل - ٨)}

(١٧) (٧ت - ٥) - [٣ت - (٣ت + ١)]

(١٨) ٣م - [(٣م - ٤) + (٥م + ٦)]

(١٩) ٣م - [(٣م - ٤) - (٥م + ٦)]

احصر الثلاثة حدود الاخيرة واسبق القوس بـ "+"

(٢٠) ك - ى + ص - ل (٢١) د + ص - ت + ف

(٢٢) م - ن + ب - ح (٢٣) ب - ت - ث - د

(٢٤) ك^{٢} + ك - ٥ - ى (٢٥) ب^{٢} - ت^{٢} - ٢ت ث - ث^{٢}

(٢٦) ك^{٢} + ى^{٢} - ٢ى ل + ل^{٢} (٢٧) ك^{٢} - ٤ب ت - ب^{٢} - ٤ت^{٢}

(٢٨ - ٣٥) احصر الثلاثة الحدود الاخيرة واسبق القوس بـ "-" في الامثلة السابقة (٢٠ - ٢٧)

(٣٦ - ٤٣) احصر الحدين الاخيرين واسبق القوس بـ "-" في الامثلة السابقة (٢٠ ٢٧)

الفصل الرابع

المعادلة البسيطة

القسم الاول

٦٩ . المعادلة . العبارات الآتية : ٣ + ٤ = ٧ ; ك + ٣ = ٩ ; م = ع ط يقال لها مساوات ومعادلات

خذ ميزانًا مضبوطًا وضع في كفتيه عبارات متساوية الوزن فانها تبقى متوازنة . أضف الى الكفتين عبارات متساوية فانها تبقى متوازنة . اخرج من الكفتين عبارات متساوية فانها تبقى متوازنة . ضاعف العبارات في الكفتين فانها تبقى متوازنة . اقسم العبارات في الكفتين على ٤ اي ابق ربعها فانها تبقى متوازنة وباختصر كلام نقول انك اذا احدثنا ذات التغيير في الكفتين فانها تبقى متوازنة . وهذا امر مألوف نعرفه بالاختبار وحسن الذوق

٧٠ . المعادلة كالميزان . المعادلة تشبه الميزان وجانباها يشبهان كفتيه المتوازنتين . وقوانين المعادلة نظير الحقائق المتعلقة بكفتي الميزان والتي ذكرناها في نومر ٦٩ . لبيان ذلك نذكر الامور الآتية :

(١) ضع عشرة غروش في يدك اليمنى وعشرة في اليسرى . ضع فوق كل منها ٥ غروش فكم مقدار كلٍّ من المجموعين ؟ كمّل الجملة الآتية : اذا جمعت كميات متساوية الى كميات متساوية فالنتائج .....

(٣) ضع ١٥ غرشاً في يدك اليمنى و١٥ في اليسرى . خذ ٥ غروش من كل يد ثم قابل بين الكميتين الباقيتين . ايهما اكبر ؟ كمّل الجملة الآتية : اذا طرحت كميات متساوية من كميات متساوية فالبواقي ....

(٣) ضع ٥٠ غرشاً في يدك اليمنى و٥٠ في اليسرى . ثم ضاعف المبلغين وقابل بين النتيجتين . ايهما اكبر ؟ كمّل الجملة الآتية : اذا ضربت كميات متساوية في ذات العدد فالحواصل .....

(٤) مقياسان متساويان في الطول فاذا كان طول احدهما ٢٠ متراً ما مقابلة طول ١٠/١ كل منهما ؟ كمّل الجملة الآتية : اذا قسمت كميات متساوية على ذات العدد فالخوارج .....

وعليه نقول : ان التغيير الذي نحدثه في احد جانبي المعادلة يجب اجراؤه في الجانب الآخر لحفظ الموازنة والاّ فانها تختلّ

٧١ . عندما نحلّ معادلات نستعمل هذه الاوليات الاربع . والاولية حقيقة لا تحتاج الى برهان :

(١) اذا جمعت كميات متساوية الى كميات متساوية فالنتائج متساوية

(٢) اذا طرحت كميات متساوية من كميات متساوية فالبواقي متساوية

(٣) اذا ضربت كميات متساوية في كميات متساوية فالحواصل متساوية

(٤) اذا قسمت كميات متساوية على كميات متساوية فالخوارج متساوية

٧٢ . جانبا المعادلة . المعادلة هي التساوي بين عبارتين . وتعرف العبارة التي تسبق علامة المساواة (=) بالجانب الايمن والتي تلي العلامة بالايسر

تمرين كتابي

اجب ما استطعت شفاهًا

(١) ماذا تجمع الى ٢٥ حتى تصير ٤٠ ؟ الى ك حتى تصير ٤٠ ؟

(٢) ماذا تطرح من ١٠٠ فيبقى ٤٠ ؟ من ١٠٠ فيبقى ك ؟

(٣) مجموع عددين ٢٥ واحدهما اكثر من الثاني بـ ٣ فما هما ؟

(٤) اي عدد يطرح منهُ ٣٠ فيبقى ٧٠ ؟ ٣٠ فيبقى ك ؟

(٥) اذا قسمت ١٨٠ الى قسمين وكان الاول ١٦٠ فما الثاني ؟ الاول ك فما الثاني ؟

(٦) حاصل عددين ٤٨٠ واحدهما ٢٤ فما الآخر ؟ احدهما ك فما الآخر ؟

(٧) الفرق بين عددين ٢٤ الصغير ٣٦ فما الآخر ؟ الصغير ك فما الآخر ؟

(٨) اذا كانت م تكرر ٧ مرات في ٢١٠ فما قيمتها ؟ ٧م = ٢١٠ فما قيمة م ؟

(٩) ٢٥م = ١٢٥٠ فما قيمة م ؟

(١٠) ما قيمة ل اذا كانت ١٧ ل = ٦٢٩

جد قيمة الحرف في ما يأتي :

٢ك = ١٦	٣ك = ١٢	٨م = ٢٤	٧ل = ١٤
٨ن = ٨٠	٩ن = ٨١	٦ع = ٤٢	٥ى = ٣٥
٤ص = ٤٠	٢٫٣ك = ٦٫٤	٣٫١ب = ٦٫٢	٥٫٢م = ١٠
½ن = ٩	½ع = ٧	½ك = ٢	½ى = ٨

$\frac{ى}{٢} = ١٨$	$\frac{١}{٥} ك = ٦$	$\frac{١}{٧} ك = ١٠$	$\frac{١}{٨} ك = ٢١$
$\frac{٢}{٨} = ٢٢$	$\frac{ن}{٦} = ٤٢$	$\frac{ع}{٦} = ١٢$	$\frac{ك}{٨} = ٣٠$
$\frac{ك}{٤} = ٢٦$	$\frac{ك}{٦} = ٦٠$	$\frac{ك}{١٠} = ٧٠$	$\frac{ع}{١٠} = ١$
$\frac{ع}{١٠} = ١٠$	$\frac{ع}{١٢} = ٢٠$	$\frac{ع}{٢٤} = ٤٠$	$\frac{ع}{١٢} = ١٢$

٧٣. الامثال الاخيرة امثلة يرى منها كيف نعرف قيمة الحرف من علاقته مع الكميات المعلومة ونحن عادة نستعمل الاحرف الاخيرة ك ول وم لتكون مجاهيل والطريقة التي نعرف بها قيمة المجهول تعرف "بحلّ المعادلة"

٧٤. جذر المعادلة. تدعى قيمة الحرف التي نجدها "جذر" المعادلة. وهي لو عُوّض بها عن المجهول صيّرت المعادلة مساواة

مثالة: $٥ك - ٤ = ٣ك + ١٧$ فجذر هذه المعادلة ٧ لاننا لو عوضنا عن ك بـ ٧ اصبحت:

$$٥ \times ٧ - ٤ = ٣ \times ٧ + ١٧$$
$$٣١ = ٣١$$

تمرين شفهي

جد قيمة الحرف المجهول في ما يأتي:

(١) $ك + ٤ = ٩$	(٢) $ك + ٣ = ٨$	(٣) $ك + ٣ = ١٠$
(٤) $ك + ٤ = ٩$	(٥) $٣ + ك = ٧$	(٦) $ك - ٣ = ١٠$
(٧) $ك - ٤ = ٣٠$	(٨) $ك - ٥ = ١٢$	(٩) $ك - ٤ = ٣$

(١٠) ك+٤=٧ (١١) ك+٥=١١ (١٢) ك−٤=١٦

(١٣) ك+٧=٢٣ (١٤) ك+٣=٤٠ (١٥) ك+٩=٣١

(١٦) ك+٨=٤٩ (١٧) ك+٦=٥٨ (١٨) ل+٢=٩٩

(١٩) ل+٥=٧٨ (٢٠) ل+٤=٩٧ (٢١) ل+٧=٣٤

(٢٢) ل+٨=٤٩ (٢٣) ل+٣٣=٣٣ (٢٤) ل+٤٧=٥٠

(٢٥) عدد كل فارس ك وكل نبيه ضعفا كل فارس فكم كله مع نبيه؟ كم كله مع الاثنين؟

(٢٦) مع يوسف ل كله فاذا خسر منها ١٠ كم يبقى لديه؟

(٢٧) امين اشترى حصانا ب ١٣٠ ليرة فبكم يبيعه ليربح ٣٩ ليرة؟ بكم يبيعه ليربح ل ليرة؟

(٢٨) فؤاد اشترى سيارة ب ٥٦٠ ليرة وباعها بخسارة ٥٦ ليرة فبكم باعها؟ بكم باعها اذا كانت خسارته ل ليرة؟

(٢٩) عمر يوسف س سنة فكم كان عمرهُ منذ ٢٠ سنة؟ منذ م سنة؟ كم يكون عمرهُ بعد مضي ١٠ سنوات؟ بعد مضي ب سنة؟

(٣٠) سيارة جورج تسير م ميلاً في الساعة فكم ميلاً تسير في س ساعة؟

(٣١) شكري بركض ذ ذراعاً في ث ثانية فما سرعته في الثانية؟ في س ثانية؟

(٣٢) مع توفيق ر ريالاً ومع احمد ثلاثة اضعاف ذلك الا ٥٠ ريالاً فكم مع احمد؟

(٣٣) وهب رجل ل ليرة لاميل و٣ اضعاف ذلك مع ١٢٠ ليرة لوديع فكم ليرة وهب وديعاً؟ وكم لاميل ولوديع معاً؟

(٣٤) الفرق بين عددين ٢٥ واصغرهما ص فما هو الاكبر؟ ما مجموعهما؟

اكتب ما يأتي بشكل معادلة جبرية

(٣٥) م الا ١٩٥ تساوي ٢٢٠ (٣٦) ل مع ١٧ تساوي ٥٩

(٣٧) ن مع ٤٠ تساوي ٦٠ الا ن (٣٨) ٣ ل الا ١٧ الا ل تساوي ٣٩

(٣٩) ٧ ل تساوي ٣٩ الا ٢ ل

(٤٠) حاصل ضرب ل X ٤ الا ٥٠ تساوي ١٧٠

(٤١) اشتغلت سلمى ز زهرة واشتغلت نجلا اكثر منها بـ ٣٠ زهرة فكم زهرة اشتغلت نجلا؟ كم زهرة اشتغلت سلمى ونجلا ؟

(٤٢) المسافة بين ب وت م ميلاً وبين ح ود اربعة اضعاف ذلك الا ٦٠ ميلاً فما المسافة بين ح ود ؟

(٤٣) اذا اضفت ٣٦٠ الى ٣٧ ضعف ل فما النتيجة ؟

تمرين موقت

الوقت دقيقتان

جد قيمة المجهول في المعادلات الآتية :

(١) ٢ ك = ٦	(٢) ٣ ك = ٩	(٣) ٢ ك = ٨
(٤) ٥ ك = ١٠	(٥) ٤ ك = ٤	(٦) ٣ ك = ١٥
(٧) ٧ ك = ٢١	(٨) ١١ ك = ٤٤	(٩) ٣٣ ك = ٦٦
(١٠) ١٧ ك = ٥١	(١١) ٤٣ ك = ٨٦	(١٢) ٢٨ ك = ٥٦
(١٣) ٧٢ ك = ١٤٤	(١٤) ١٨ ك = ٥٤	(١٥) ١٩ ك = ٥٧
(١٦) ٥٢ ك = ٧٥	(١٧) ٢٤ ك = ٨٤	

(١٨) ١٧ك = ٢١ (١٩) ٧ك = ١٥ (٢٠) ٦ك = ١٢

(٢١) ١٢ك = ١٤٤

متوسط الاصابات ١٩

تمرين موقت

الوقت دقيقتان

(١) ك + ٣ = ٦ (٢) ك + ٢ = ٧ (٣) ك + ٥ = ٩

(٤) ك + ٧ = ١٢ (٥) ك + ١ = ١٥ (٦) ك + ١٣ = ٢٢

(٧) ك + ١٥ = ٢٧ (٨) ك + ٤٠ = ٥٠ (٩) ك + ٢٧ = ٤١

(١٠) ك + ٩ = ٧٩ (١١) ك + ٨ = ٥٤ (١٢) ك + ٣٤ = ٨١

(١٣) ك + ١٢ = ١٧٤ (١٤) ك + ١٩ = ٧٧

(١٥) ك + ٢٣ = ٩٦ (١٦) ك + ٤٨ = ١٠٠

(١٧) ك + ٩٦ = ١٥٠ (١٨) ك + ٧٣ = ٢١٢

متوسط الاصابات ١٥

تمرين موقت

الوقت دقيقة

(١) ك − ٢ = ٣ (٢) ك − ٤ = ٧ (٣) ك − ٦ = ١٠

(٤) ك − ٥ = ٣ (٥) ك − ٧ = ١ (٦) ك − ١٣ = ١٢

(٧) ك – ١١ = ٢٢ (٨) ك – ٩ = ١٨ (٩) ك – ٢٫٧ = ٤٫٤

(١٠) ك – ١٥ = ٢٨ (١١) ك – ١٧ = ٢٤ (١٢) ك – ٤١ = ٥٢

(١٣) ك – ٢٫١٢ = ١٤٫٧ (١٤) ك – ٧٫١٤ = ٩٫١٨

(١٥) ك – ٤٠ = ٢ (١٦) ك – ٧٠ = ٥

(١٧) ك – ٥٥ = ٨٫٧ (١٨) ك – ٢٫٨ = ٤

متوسط الاصابات ١٢

٧٥. تطبيق الاوليات . ذكرنا سابقًا ان المعادلة الصحيحة تشبه الميزان تمامًا . فكما اننا لو زدنا بطريقة الجمع او الضرب اونقصنا بطريقة الطرح او القسمة من كلا الكفتين المتوازنتين كمية واحدة او كميات متساوية تبقى الكفتان متوازنتين هكذا لو جمعنا الى كلا جانبي المعادلة او طرحنا منها او ضربناها او قسمناها على كمية واحدة او كميات متساوية يبقى جانبا المعادلة متساويين

فلو كانت ٩م = ٧٢

كانت ٩م + ٣٠ = ٧٢ + ٣٠

" ٩م – ١٧ = ٧٢ – ١٧

" ٦ × ٩م = ٦ × ٧٢

" ٩م ÷ ٣ = ٧٢ ÷ ٣

وعليه نجد قيمة م في ما يأتي :

(١) ٩م = ٧٢ بقسمة الجانبين على ٩ (الاولية ٤)

م = ٨

(٢) ٢/٧ = ٣ ١/٧

م = ٢٢ بضرب كلا الجانبين ب ٧ (الاولية ٣)

(٣) ٧م + ٤م − ٥م = ١١٥ + ٤٥ − ١٠

اولاً اصلح كلا الجانبين اي ضم حدودها

٦م = ١٥٠

بالقسمة على ٦ (الاولية ٤) م = ٢٥

(٤) ٥ك + ١٢ = ٤٠ − ٢ك .....(١)

اولاً اجمع ٢ك الى الجانبين

٥ك + ٢ك + ١٢ = ٤٠ − ٢ك + ٢ك .....(٢)

ثانياً اطرح ١٢ من الجانبين

٧ك + ١٢ − ١٢ = ٤٠ − ١٢ .....(٣)

٧ك = ٢٨

ك = ٤

٧٦. المقابلة . لو تأملنا ملياً الاسطر المرقومة (١) و(٢) و(٣) في العمل الاخير (نومرو ٤) لوجدنا اننا لما جمعنا ٢ك الى كلا الجانبين تنتقل ٢ك من الجانب الواحد الى الجانب الآخر مع تغيير علامتها. وانا لما طرحنا ١٢ من الجانبين انتقلت ١٢ من جانب الى جانب بتغيير علامتها

فاذاً يجوز لنا ان ننقل اي حدّ من جانب الى جانب بشرط ان نغيّر علامته ويعرف هذا النقل "بالمقابلة" . وعليه عندما نحل معادلة عليك ان تتبع هذا النسق «

اولاً : انزع الحواصر (اذا وجد منها شيء)

ثانياً : قابل اي انقل كل الكميات المجهولة الى الجانب الايمن والكميات المعلومة الى الايسر

ثالثاً : اصلح اي ضم حدود كل جانب

رابعاً : اقسم الجانب الايسراي الكمية المعلومة على معامل المجهولة

ملحوظة : اياك ان تنسى تغيير علامة الحدّ حينما تنقله بالمقابلة من جانب الى جانب

تمرين كتابي

اجب ما استطعت شفاهاً

جد قيمة الحرف المجهول في المعادلات الآتية :

(١) ك + ٥ = ١١ (٢) ك – ٤ = ١٢ (٣) ٣ك + ١٠ = ٢٨

(٤) ٥ك – ٦ = ١٩ (٥) ٩ك – ١٢ = ٦ (٦) ٤ك – ١٢ = ك

(٧) ٦ك = ٣٠ + ٢ك (٨) ٩م = ٤٠ – م (٩) ١٣م = ٣٦ – ٥م

(١٠) ١٣م = ٤م + ٢٧ (١١) ٣ى + ٢ = ى + ٨

(١٢) ٣ك + ١٥ = ك + ٢٥ (١٣) ٢ك – ٣ = ٣ك – ٧

(١٤) ٣ك + ٤ = ٥ (ك – ٢) (١٥) ٢ك + ٣ = ١٦ – (٢ك – ٣)

(١٦) ١٥ (ك – ١) + ٤ (ك + ٣) = ٢ (٧ + ك)

(١٧) ٧ (٢٥ – ك) – ٢ك = ٣ (٣ك – ٢٥)

(١٨) ٩٧ – ٥ (ك + ٣٠) = ١١١ – ٨ (ك + ٣)

(١٩) ك – { ٣ + [ك – (٣ + ك)] } = ٥

(٢٠) ١٧٩ – ١٨ (ك – ١٠) = ١٥٨ – ٣ (ك – ١٧)

(٢١) ٨ – ٦ك + ١٢ + ١٠ك = ٢٦

(٢٢) ك + ٣ك + ١٨ + ك + ٣ك + ١٨ = ١١٦

(٢٣) ٤ك – ٣ + ٨ك – ١٧ = ٤٠ + ٦ك – ٥٤

٧٧. حل الاعمال . الامثلة الآتية تظهر جليًّا كيفية حلّ الاعمال بالمعادلات ولاجل الحصول على المهارة والسرعة يجب الانتباه للنصائح الآتي بيانها :

ب : ادرس السؤال باعتناء تام حتى تفهمه جيدًا وتعلم ما المطلوب تمامًا

ت : اجعل الحرف ك او ى يمثّل الكمية المجهولة المطلوب وجدانها

ث : مثّل كل عبارة بالرمز المساوي لها ولا تنسَ ما المراد به

ج : ضع الرموز بشكل معادلة وحلّها كما تعلمت سابقًا

(١) ما هو العدد الذي تضيفه الى ٥ اضعافه ليكون المجموع ٩٦٠ ؟

الاعداد التي نبحث فيها	رموز الاعداد
العدد المطلوب	= ك
٥ اضعاف العدد المطلوب	= ٥ ك
مجموع العدد و٥ اضعافه	= ٩٦٠

المعادلة بين هذه الاعداد

مجموع العدد و٥ اضعافه = ٩٦٠

اي ٥ ك + ك = ٦ ك = ٩٦٠

∴ ك = ١٦٠ وهو الجواب

(٢) ١٢٨٠ غرشًا موّلفة من مجيديات وبشالك وعددها ١٦٠ قطعة . فاذا كان المجيدي ٢٤ غرشًا والبشالك ٤ غروش فكم عدد كل منها ؟

الاعداد التي نبحث فيها		رموز الاعداد
عدد المجيديات	=	ك
عدد البشالك	=	١٦٠ - ك
قيمة المجيديات	=	٢٤ ك غرشاً
قيمة البشالك	=	٤ (١٦٠ - ك) غرشاً

المعادلة بين هذه الاعداد

قيمة المجيديات والبشالك	=	١٢٨٠ غرشاً
اي ٢٤ ك + ٤ (١٦٠ - ك)	=	١٢٨٠
وبالحل ك	=	٤٠ ريال مجيدي
و ١٦٠ - ك	=	١٢٠ بشلكاً

تمرين كتابي

(١) ما عددان مجموعهما ١٢٦ واحدهما ضعف الآخر ؟

(٢) ما العدد الذي اذا طرحت منه ١٩ يبقى ٢٧ ؟

(٣) ما العدد الذي اذا زدت عليه ضعفه و ٢٤ يصير ١٤٤ ؟

(٤) ما عددان مجموعهما ٢١٥ واحدهما اربعة اضعاف الآخر ؟

(٥) ما العدد الذي اذا زدت عليه ٤ اضعافه و ٤٠ يصير ١٨٠ ؟

(٦) ما العدد الذي اذا طرحت ٤٠ من ثلاثة اضعافه يبقى ١٤٠ ؟

(٧) عدد يزيد الآخر بـ ١٨ ومجموعها ١٦٨ فما هما ؟

(٨) طول مستطيل ٥ اضعاف عرضه ومحيطه ١٥٦ متراً فكم طوله وعرضه ؟

(٩) لدى فؤاد ١٠ كلل اكثر من عارف ومجموع كللها ١٢٠ فكم كلة مع كل منهما ؟

(١٠) عدد طلبة مدرسة ١١٢ ولداً والصبيان اكثر من البنات بـ ١٢ فكم عدد الصبيان والبنات ؟

(١١) كان عدد الناخبين لرياسة بلدية بيروت ١٦٤٨٠ ففاز محمد باكثرية ٩٨٠ صوتاً على مناظره يوسف فكم صوتاً نال كلٌّ منهما ؟

(١٢) حلّ وديع عدداً معيناً من اعمال الجبر وحلّ اميل ضعفي ذلك الا ١٦ عملاً فاذا حلاّ ٥٠ عملاً كم عملاً حلّ كل منهما ؟

(١٣) اي عدد اذا اضفت اليه ٢٣٠ يكون المجموع ٥ اضعاف العدد الاصلي ؟

(١٤) طول قسم ترعة بناما الذي يمرّ في الارض الساحلية ٨ اضعاف طول القسم الذي يمرّ في الارض الجبلية فكم هو طول كلٍّ من قسميها اذا كان طول الترعة ٤٩ ميلاً ؟

(١٥) مساحة حقلين ٢٢٥ فداناً واحدها ٤ اضعاف الآخر فكم مساحة كلٍّ منهما ؟

(١٦) مع نجلا وسلمى ٨٤ كارت بوستال فاذا كانت حصة سلمى تنقص ١٢ عن ضعفي حصة نجلا فكم كارتاً مع كلٍّ منهما ؟

(١٧) ربح يوسف ونجيب ٨٩٠٠ ليرة وكانت حصة يوسف ٣٠٠ ليرة اكثر من ضعفي حصة نجيب فكم نال كلٌّ منهما ؟

(١٨) مجموع ثلاثة اعداد ٤٨٠ وكان الثاني ٤ اضعاف الاول والثالث ٥

اضعاف الاول فكم كان كلٌ منها ؟

(١٩) مجموع ثلاثة اعداد ٣٦٠٠ والثاني ٢ اضعاف الاول والثالث ٢ اضعاف الثاني فكم كان كلٌ منها ؟

(٢٠) عمر رجل ٢ اضعاف عمر ولدهِ ومجموع عمريهما ٨٤ سنة فكم عمر الاب وعمر الابن ؟

(٢١) ثلث عدد مع ٨ يساوي ربع العدد مع ١٦ فما هو ؟

(٢٢) ثمن بيت وجينة ٢٤٠٠ ليرة وثمن الجينة ثلث ثمن البيت فكم ثمن كلٌ منهما ؟

(٢٣) مجموع ثلاثة اعداد متتالية ١٢٨ فما هي ؟

(٢٤) الفرق بين عددين ٢٣ واحدهما ٩ اضعاف الآخر فما هما ؟

(٢٥) الفرق بين ٨ اضعاف العدد و٣ اضعافهِ ١٩٥ فما هو العدد ؟

(٢٦) نهر النيل اطول من الامازون بـ ٥٠٠ ميل واقصر من نهر المسيسبي الذي هو اطول انهار العالم بـ ٤٠٠ ميل وطول الثلاثة الانهر ١١٥٠٠ ميل فكم طول كل منها ؟

تمرين للمراجعة

(١) اذا كانت ب = ٥ وت = ٢ ول = ١ فما قيمة ب + ٢ت – ٣ل ؟

(٢) م = س ق + ½ ج ق^{٢} فما قيمة م اذا كانت س = ١٠ وج = ٩٫٨ وق = ٦ ؟

(٣) اذا كانت م = ٦ فما قيمة ٥م^{٢} ؟ (٥م)^{٢} ؟

(٤) لعب سليم وربح اول يوم عدداً من الكمال وثاني يوم ١٨ كة اكثر من

اليوم الاول فاذا ربح ١١٨ كلة كم ربح اول يوم وثاني يوم ؟

ابسط ما يأتي :

(٥) $٣ب^{٢}-٥ب ت+٢ت^{٢}-ت^{٢}+٤ت^{٢}+٢ب ت-٢ب^{٢}-٤ب ت-٥ت^{٢}+٦ب^{٢}$

(٦) $٢م^{٤}-٥م^{٣}-٣م^{٢}+٢م-٥+٢م^{٣}-٣م^{٤}-٣م+٣م^{٢}-٢م+٣م^{٣}-٦+٣م^{٢}+م^{٤}-٣م^{٣}+٧-م+٢+٣م^{٣}+٣م^{٤}-٤م-٣م^{٢}$

(٧) اطرح $٣ك-٣ك^{٢}+٥ك-٣$ من $٨ك^{٢}-ك^{٢}-١$

(٨) اطرح $٥ل^{٢}-٣ل^{٢}م+م^{٢}$ من $٣ل^{٢}+ل م^{٢}-م^{٣}$

(٩) مجموع عددين ٤٢٣٠ واحدهما ٥٪ الآخر فما هما ؟

(١٠) اصطاد سليم وخليل واحمد ١٦٨ رطل سمك فاخذ سليم ضعفي ما اخذ كلٌّ من خليل واحمد فكم كانت حصة الواحد منهم ؟

(١١) ابسط : $٣ل-(٥ل-٣)+٧$

(١٢) ابسط : $٣ب-[٧ب-(٤ب+٥)-٤]-٣$

(١٣) حلّ : $٣م-(٥م-١)=١٧$

(١٤) مجموع اربعة اعداد متتالية ١٠٢ فما هي ؟

(١٥) ابسط : $ل+ل+ل+ل+م+م+م+م+٣ل.ل.ل.ل.٢.٢.٢.٢.م.م$

(١٦) وُلد الاسكندر المكدوني سنة ٣٥٦- وعاش ٣٣ سنة ففي اي سنة توفي ؟

(١٧) اذا كانت ص الاصل وم معدل المئة وك كمية القطع فجد القانون الرمزي ل ك ما قيمة م اذا كان ك = ٨٠ وص = ٣٣٠ ؟

(١٨) ارسم الخط البياني لنمو عدد سكان الولايات المتحدة:

١٧٩٠ = ٤ ملايين	١٨٣٠ = ١٢ مليونًا	١٨٧٠ = ٣٩ مليونًا
١٨٠٠ = ٥ "	١٨٤٠ = ١٧ "	١٨٨٠ = ٥٠ "
١٨١٠ = ٧ "	١٨٥٠ = ٢٣ "	١٨٩٠ = ٦٣ "
١٨٢٠ = ١٠ "	١٨٦٠ = ٣١ "	١٩٠٠ = ٧٦ "
	١٩١٠ = ٩٢ مليونًا	١٩٢٠ = ١١٠ ملايين

تنبيه : ضع عشرات السنين على نقط المحور الافقي وعشرات الملايين على المحور الرأسي

عيّن بواسطة الرسم عدد السكان لسنة ١٨٢٥ و١٨٤٥ و١٨٨٥ و١٩١٥

عيّن بواسطة الرسم السنة التي كان فيها عدد السكان ١٥ مليونًا ٣٥ مليونًا . ٧٠ مليونًا ١٠٠ مليون

(١٩) حلّ وامتحن: $٣-(م-٢)=٧-٥م$

(٢٠) حلّ وامتحن: $٤ك+(ك-١)=٣ك-(ك+٢)$

(٢١) اطرح: $٥م^{٢}-٣ب م-٢ب^{٢}$ من $-٣م^{٢}+٢ب م^{٢}-ب^{٤}$

(٢٢) اذا كانت $ب=٤وم=١$ فما قيمة $٥م^{٢}-٣(ب-٢م)+٥ب^{٢}$؟

(٢٣) ابسط: $م^{٢}-[٥ب م+(ب^{٢}-٢م^{٢}-ب م)-٣م^{٢}]-٥ب^{٢}$.

امتحن صحة العمل بفرض $ب=١وم=٢$

(٢٤) معدل المسافة بين الارض والشمس ٩٢,٨٠٠,٠٠٠ ميل وهي تزيد على ١٠٧ اضعاف قطر الشمس بـ ٨٦٥٢٠٠ ميل فكم ميلاً يكون قطر الشمس ؟

(٢٥) معدل المسافة بين الارض والقمر ٢٣٨٨٥٠ ميلاً وهي تزيد على ١١٠ اضعاف قطر القمر بـ ٢١٠٤٠ ميلاً فكم ميلاً يكون قطر القمر ؟

القسم الثاني

٧٨. المعادلة البسيطة هي التي تتم فيها الشروط الآتية :

(١) ان تحتوي بالاقل على مجهول واحد
(٢) ان يكون دليل المجهول واحداً "١"
(٣) ان لا يتضمن احد الحدود اكثر من مجهول واحد
(٤) ان لا يكون الحرف المجهول دليلاً
(٥) ان لا يكون المجهول في مخرج الكسر

وهذه الشروط متوفرة في جميع المعادلات التي مرت بك فهي جميعها اذاً معادلات بسيطة ولكن $٣ك = ٨ وك - ك ى = ٣ وك^{١} + \frac{٢}{ك + ١} = ٢$ ليست معادلات بسيطة

والمقام الاول في علم الجبر للمعادلة حتى ان بعض الرياضيين يحسبونه علم المعادلات ولهذا السبب قد اسهبنا في بسطها واكثرنا من ايراد الامثلة المتنوعة . وسوف نعود اليها كلما سمحت الفرصة

٧٩. امتحان المعادلة يتم بالتعويض عن الحرف المجهول بقيمته فاذا تساوى الجانبان كان الحل صحيحاً والاّ فلا

والافضل لامتحان الحل ان تعوض عن المجهول بقيمته في السؤال وليس في المعادلة فاذا كانت القيمة مطابقة لمنطوقه كان الحل صحيحاً والاّ فلا

وقد يتعذر على الطالب ان يفهم منطوق الحل لانه يتناول الكليات ولتسهيل ذلك عليه فليقابله بعمل حسابي على نسقه وليقتصر فيه على الاعداد الصغيرة التي يسهل العمل فيها والتلاعب بها

تمرين شفهي

(١) مجموع عددين م واحدهما ن فما الآخر ؟

(٢) لاميل ل ليرة ومالهُ اكثر من مالك بـ ن ليرة فكم مالك ؟

(٣) سار وديع س ساعة بمعدل م ميلاً في الساعة فكم سار ؟

(٤) عمر عادل س سنة فكم كان عمرهُ منذ ٦ سنوات ؟ كم يكون عمرهُ بعد ٩ سنوات ؟ اذا كان عمر اخيهِ سلمى ضعفا عمرهِ الآن فكم يكون عمرها بعد ٦ سنوات

(٥) زد ٤ على صورة ومخرج الكسر ت/ب

(٦) حاصل عددين ح واحدهما ب فما مجموعهما ؟

(٧) ما زيادة ل عن ن ؟ ما نقص م عن ب ؟

(٨) كم مرة تكرر ٩ في ٥٤ ؟ ب في ج ؟

(٩) ٨ اي جزء من ٥٦ ؟ ك اي جزء من ى ؟

(١٠) سلمى معها غ غرشاً ونجلا معها ضعفاها الآ ١٥ غرشاً فكم غرشاً مع نجلا ؟

(١١) طول نهر م ميلاً وطول نهر آخر ٣ اضعافهِ الآ ١٥ ميلاً فكم طولهُ ؟

(١٢) عدد مؤلف من ؟ آحاد و ؟ عشرات فما هو ؟ من ب آحاد وت عشرات فما هو ؟ (جواب : ب + ١٠ ت)

(١٣) لولد خ خوخة أكل منها ل فكم بقي لهُ ؟

(١٤) سرعة القطار م ميلاً في الساعة ففي كم من الوقت يقطع ل ميلاً ؟

(١٥) ما العدد الشفعي الذي يلي ٢٤ ؟ ٣ ع ؟

(١٦) ما العدد المؤلف من متراتبين آحادهُ ك وعشراتهُ ى ؟

(١٧) سار سبع م ميلاً في س ساعة فكم ميلاً يسير في ى ساعة ؟

(١٨) كم الفرق بين مربع ل وضعفيها ؟

(١٩) كان لولدك كلة وربح فوقها ن فكم اصبح لديو ؟

(٢٠) ابتاع لحام خ خروفاً وذبح منها في شهر م فما الباقي ؟

(٢١) عمر ولد ل سنة فكم يكون عمرهُ بعد م سنة ؟ منذ ن سنة ؟

(٢٢) اعطيت ل ليمونة لكل من ص صبياً فكم ليمونة اعطيت ؟

(٢٣) يسير رشيد م متراً في ث ثانية ففي كم ثانية يسير ل متراً ؟

(٢٤) معدل سرعة القنبلة م متراً في الثانية ومعدل سقوط الحجر د متراً في الساعة فما نسبة معدل سقوط الحجر الى سير القنبلة ؟

(٢٥) الفرق بين عددين ف واحدهما ل فما الآخر ؟ (جوابان)

تمرين كتابي

اجب ما استطعت شفاهاً

(١) اذا اضفت ٢٢ الى عدد كان المجموع ٥٠ فما هو العدد ؟

(٢) اذا طرحت ٣٫٧ من عدد ما بقي ٤٫٧٥ فما هو العدد ؟

(٣) اذا ضاعفت عدداً وطرحت منهُ ٢٧ بقي ٤٩ فما هو العدد ؟

(٤) اذا ضربت عدداً في ٤ وزدت عليهِ ٢٫٥ لساوى ٣ اضعاف العدد مع ١٦٠ فما هو العدد ؟

(٥) محيط مستطيل ٢٨ متراً وطولهُ اكثر من عرضهِ بـ ٤ امتار فكم طولهُ وكم عرضهُ ؟

(٦) مجموع عددين ٤٠٤ واحدهما يزيد ١٢٠ عن ٤ اضعاف الآخر فما هما ؟

(٧) محيط مستطيل ١٠٤ اذرع وطوله يزيد ٧ اذرع عن ضعفي عرضه فكم طوله وكم عرضه ؟

(٨) مجموع ثلاثة اعداد ٥٠ . الاول ضعف الثاني . و ٣ اضعاف الثاني تزيد ١٦ عن الثالث فما هي الاعداد ؟

(٩) ربح ٣ اولاد ٩٨ غرشاً . وكانت حصة الثاني تزيد ١١ غرشاً عن حصة الاول . وحصة الاول والثاني تزيد ٣٨ عن حصة الثالث فكم كانت حصة كل منهم ؟

(١٠) طول ترعة السويس ١٠٠ ميل وهو يزيد ميلين عن ٨ اضعاف طول اطول نفق (نفق سمبلون) فكم طول النفق ؟

(١١) درجة حرارة الفوس الكهربائية ٥٤٠٠ بمقياس فارنهيت وهي تزيد ٤٦٤° عن درجة حرارة ذوبان الرصاص فما درجة ذوبانه ؟

(١٢) معدل سرعة الصوت ١٠٩٠ قدماً في الثانية وهذا يزيد ١٠ اقدام عن ٩ اضعاف سرعة الشعور العصبي قابل هذا مع سرعة الطيارة التي تسير ٢٠٠ ميل في الساعة

(١٣) اقسم ١٧٥ ليرة بين ٣ رجال بحيث تزيد حصة الاول ٢٠ ليرة عن حصة الثاني وتنقص حصة الثالث ١٠ ليرات عن حصة الثاني

(١٤) عمر اديب ضعفا عمر بطرس وسليم اكبر من اديب بـ ٧ سنوات ومجموع اعمارهم ٦٧ سنة فكم عمر كل منهم ؟

(١٥) عمر انيس ٣ اضعاف عمر نسيم وسامي اكبر من نسيم بـ ١٠ سنوات وبعد ٥ سنوات يكون مجموع اعمارهم ٦٠ سنة فكم عمر كل منهم الآن ؟

(١٦) امين اكبر من وديع بـ ١٠ سنوات وفريد اصغر من وديع بـ ٦

سنوات ومنذ ٤ سنوات كان مجموع اعمارهم ٤٦ سنة فكم عمر كل منهم الآن ؟

(١٧) المشتغلون بالزراعة في الولايات المتحدة يزيدون ١٢ ٪ عن الذين يشتغلون بالصناعة وهؤلاء يزيدون ٨ ٪ عن الذين يتعاطون التجارة . والباقون ٢٤ ٪ يتعاطون اموراً مختلفة فكم جزءاً في المئة يشتغلون في الزراعة والصناعة والتجارة ؟

(١٨) ينقص علو برج ايفل في باريس ١٢٠ قدماً عن ضعفي علو تذكار وشنطن . وهذا الاخير يزيد ١٠٥ اقدام عن علو الهرم الكبير في مصر و١٠٧ اقدام عن قبة كاتدرائية مار بطرس في رومية . ومجموع ارتفاع الجميع ٢٤٤٣ فكم ارتفاع كل منها ؟

(١٩) تنقص مساحة قارة اسيا ١٨١٨٠٠٠ ميل مربع عن ضعفي مساحة اميركا الشمالية واميركا الجنوبية تزيد ٤٩١٠٠٠ ميل مربع عن اميركا الشمالية و٤٢٨٢٠٠٠ عن اوربا ومجموع الاربع قارات ٤١٥٤٨٠٠٠ ميل مربع فكم مساحة كل منها ؟

(٢٠) تزيد سعة كاتدرائية مار بطرس ٢٩٠٠٠ عن كاتدرائية ماربولس (لندن) و١٧٠٠٠ عن كاتدرائية ميلان و٢٢٠٠٠ عن كاتدرائية مار بولس (رومية) وسعة الاربع كاتدرائيات ١٤٨٠٠٠ فكم سعة كل منها ؟

(٢١) ما عددان مجموعهما ٧٢٠٠ و٣ اضعاف الاكبر تساوي ٥ اضعاف الاصغر ؟

(٢٢) اذا اضفت ٣ الى ضعفي عدد ما وضربت المجموع في ٦ يكون الحاصل ٦١٨ فما هو العدد ؟

(٢٣) دراهم وديع ٣ اضعاف دراهم توفيق واذا اعطى توفيقاً ١٩ غرشاً يبقى معهُ ضعفاهُ فكم يكون دراهم كلٍّ منهما ؟

(٢٤) رجل يصرف ½ دخله على الاكل والسكن و⅛ على الملبوس و⅒ على الاحسان ويبقى معه ١٢٧٣٠ غرشاً فكم دخله ؟

(٢٥) ما العدد الذي تجمعه الى صورة ومخرج الكسر ٤٠/٣٢ ليصير ½ ؟

تمرين للمراجعة

(١) اجمع: ½ ل^{٢} – ¼ ل + ⅛ ، ¼ ل^{٢} + ⅛ ل – ½ و¼ ل^{٢} – ½ ل + ⅛^{٢}

(٢) اطرح: ⅛ ك^{٢} – ½ ك + ⅛^{٢} من ½ ك^{٢} – ¼ ك – ⅛^{٢}

(٣) اجمع: ٣ (ك + ى) – ٢ (ك + ص) + ٣ (ى + ص) و٤ (ك + ص) – ٣ (ك + ى) – ٥ (ى + ص) و٤ (ك + ى) – (ك + ص) + ٤ (ى + ص)

(٤) اطرح مجموع ٤ ب^{٢} ت^{٢} – ٣ ب^{٢} + ٢ ب^{٢} – ت^{٢} و٣ ب ت – ٢ ت^{٢} + ب^{٢} من مجموع ب^{٢} – ٧ ب ت + ٣ ت^{٢} و٢ ب^{٢} – ٦ ت^{٢} + ٧ ب^{٢} ت^{٢}

(٥) ماذا تضيف الى ك^{٢} – ك + ١ لتصير ٣ ك^{٢} ؟ ٥ ك ؟ ٢٥ ؟ ٠ ؟

(٦) ماذا تطرح من ٥ ب^{٢} – ٤ ب + ٣ ليكون الباقي ٥ ب^{٢} ؟ ٥ ب^{٢} + ٢٠ ؟ ١٣ ؟ ت – ٣ ب + ١ ؟

(٧) اقسم ١٠٠٠ الى ٣ اقسام ليكون الثاني ٣ اضعاف الاول والثالث يزيد ١٠٠ عن الاول

(٨) ٥ اميال تزيد ١٥٣ قدماً و٤ قراريط عن ٨ كيلومترات فكم برداً في الكيلومتر ؟

(٩) يقدر في شحن البضاعة ٤٠ قدماً مكعبة للطن . جد القانون للثقل ط (اطنان) اذا اردت ان تشحن صندوق سيارة طوله ل قدماً وعرضه ع وعلوه ر

(١٠) ابسط : ١٢ك^{٢} − ٥ك^{٢}ى + ٦ى^{٢} − ٧كى^{٢} − ى^{٢} − ٥ك^{٢} − ٤كى^{٢} − ٣ك^{٢}ى + ٥ص^{٢} + ٨ك^{٢}ى + ٦ك^{٢} − ٩ى^{٢}

(١١) اذا كانت م = ٧ فما قيمة : ٣م − ٢ ؟ ٧م − ٢ + ٣م ؟

اذا كانت ت = ٤م^{٢} − ٣م^{٢}ن + ٣م ن^{٢} + ن^{٢} وب = ٤م^{٢} − م^{٢}ن − م ن^{٢} − ن^{٢} وث = ٣م^{٢} − م^{٢}ن + ٢ن^{٢} ود = م^{٢} − ٢م ن^{٢} + ن^{٢}

فما قيمة :

(١٢) ت − ب + ث − د ؟ (١٣) ت − [ب − (د + ث)] ؟

(١٤) ت − (ب + ث) + د ؟ (١٥) ب + [ت − (ث + د)] ؟

(١٦) اذا كانت ك = ٣ى = ٢ ص = ٠ فما قيمة ك^{٢} + ½ى^{٢} − كى ص^{٢} ؟

(١٧) ما المعنى ؟ ما الدليل ؟ ما مجموع المتممات في العبارات الآتية : ٣ك^{٢} + ٣ك ؟ ٢ك^{٢} + ك^{٢} ؟ ك^{٢} + ٧ك ؟ ما مجموع الدلائل في كل منها ؟

(١٨) بيّن الحدود المتشابهة او المتجانسة في ب^{٢} − ٣ب ت + ت^{٢} − ٢ب^{٢} − ب^{٢} + ٣ت^{٢} + ٥ب ت + ٧ب^{٢}

(١٩) ابسط : ٢ ت − ب − (٣ت − ٢ب) + (٢ت − ٣ب) − (ت − ٢ب)

(٢٠) ما درجة الحدّ ؟ ما درجة الحدّ العلي في : ٤ك^{٢} − ٣ب^{٥}ت^{٢} + ت^{١١} ؟

(٢١) ما زيادة مجموع ب وت عن الفرق بين ث وم ؟

(٢٢) سار رجل ٢ب − ت ميلاً الى الشمال من بيروت ثم سار ٣ب + ٢ت ميلاً الى الجنوب فكم ميلاً تكون المسافة من بيروت ؟

الفصل الخامس

الضرب والقسمة

القسم الاول

٨٠. حاصل ضرب ٥ ب في ٦ ت هو حاصل ضرب جميع اضلاع المضروب والمضروب فهو اي ٥ × ب × ٦ × ت . وتغيير نظام ترتيب الاضلاع لا يغير قيمة الحاصل وعليه نرتبها هكذا :

٥ × ٦ × ب × ت = ٣٠ ب ت وهو الحاصل

اي ان مسمى الحاصل هو حاصل ضرب مسمى المضروب في مسمى المضروب فهو . وحاصل الاحرف المختلفة البسيطة التي تكون دلائلها من القوة الاولى هو وضعها متتابعة بدون فاصل كما مرّ بك قبلاً

٨١. ضرب الاضلاع الحرفية وقانون الدلائل :

(١) ما دليل الحرف او الكمية ؟ ما معنى $ك^{٢}$ ؟ $ب^{٣}$ ؟ $ل^{٢}$ ؟

(٢) اكتب باختصار شكل : ب . ب . ب . ب ; ر . ر . ر . ر . ر ; م . م . م . م . م . م ; ت . ت ..... ت (الى ١١ ضلعاً) ; ى . ى . ى .... ى (الى ٣٠ ضلعاً)

(٣) نجد حاصل ضرب $ل^{٢} \times ل^{٤}$ كما يأتي:

$ل^{٢} = ل . ل$ و $ل^{٤} = ل . ل . ل . ل$

$\therefore ل^{٢} \times ل^{٤} = (ل . ل) \times (ل . ل . ل . ل) = ل . ل . ل . ل . ل . ل$

$ل . ل = ل^{٢}$

(٤) ما حاصل: $ك^{٢} . ك^{٤}$ ؟ $م^{٢} . م^{٣}$ ؟ $ب^{٤} . ب^{٥}$ ؟ اجرِ كما في (٣)

(٥) ما حاصل: $م^{٢} . م^{٣}$ ؟ $ب^{٢} . ب^{٥}$ ؟ $ك^{٢} . ك^{٥}$ ؟ $ى^{٦} . ى^{٥}$ ؟

نستنتج من الامثلة المارّ ذكرها ان قوة الحرف في الحاصل هي مجموع دلائلها في المضروب وفي المضروب فيه وهذا يعرف بقانون الدلائل

تمرين شفهي

ما حاصل:

$ك^{٤} . ك^{٢}$ ؟	$ى^{٦} . ى^{٥}$ ؟	$ص^{٢} . ص^{١٠}$ ؟	$ت^{٤} . ت^{٦}$ ؟
$ص^{٥} . ص^{٦}$ ؟	$ك^{٨} . ك^{٤}$ ؟	$م^{١٠} . م^{٢}$ ؟	$ص^{٢} . ص^{٥}$ ؟
$ن^{٨} . ن^{٧}$ ؟	$ح^{١٠} . ح^{٢٠}$ ؟	$٣^{٢} . ٣^{٤}$ ؟	$٣^{٢} . ٣^{٣}$ ؟
$٥^{٢} . ٥^{٤}$ ؟	$٨^{٢} . ٨^{٥}$ ؟	$١٠^{٢} . ١٠^{٥}$ ؟	

٨٣. قانون العلامات

(١) $٤ \times ٣ = ٣ + ٣ + ٣ + ٣ = ١٢$

(٢) $٤ \times -٣ = (-٣) + (-٣) + (-٣) + (-٣) = -١٢$ اي ان -٣ مكررة ٤ مرات

(٣) ٤ × ٤ – = ؟

بما ان ٤ × ٤ = ٤ × ٤ اي انهُ لا فرق اذا غيّرنا ترتيب الاضلاع

فعلى مبدإ القياس نقول ان ٤ × ٤ – = ٤ × ٤ –

ولكن ٤ × ٤ – = ٤ – (٤ –) + (٤ –) + (٤ –) = ١٢ –

فاذًا ٤ × ٤ – = ١٢ –

(٤) (٤ –) × (٤ –) = ؟ ولبيان النتيجة نجد (٧ – ٤) (٧ – ٤)

٧ – ٤ بما ان ٧ – ٤ = ٤ و ٧ – ٤ = ٤ فاذًا (٧ – ٤)

٧ – ٤ (٧ – ٤) تساوي ٤ × ٤ او ١٢ . واذا ضربنا

٤٩ – ٢١ (٧ – ٤) (٧ – ٤) عددًا عددًا فحاصل – ٤ و – ٤

– ٢٨ (؟) ١٢ يجب ان يكون + ١٢ ليصح العمل

٤٩ – ٤٩ + ١٢

ومما مرّ نستنتج من (١) و(٤) ان + × + = + و – × – = + . ومن (٣) و(٤) ان – × + = – و + × – = –

اي ان حاصل العلامات المتشابهة ايجابي وحاصل العلامات المختلفة سلبي وهذا يعرف بقانون العلامات

تمرين شفهي

ب . ب	٢ب . ب	٢ب . ٢ب	ب٢ . ب
٢ب٢ . ب	٢ب٢ . ٢ب	٢ب٢ . ٢ب٢	ب (– ت)
(– ب) ت	(– ب) (– ت)	(– ٢ب) ت	٢ب (– ت)

(-٣ب)(-ت) (-٧ب)(-٣ت) ب٢(-ت) ب٢(-ت٢)
(-ب٢) (-ت٢) (-ب٢)(-ب٤) ٢ب٢ . ٥ب٢
٣ب٢(-٧ب٢) (-٤ب٢)(-٧ب٢) ٥ك٢ى٢ . ٤ك٢ى٢
(-٥ب٢ت٥)٣ب٢ت٢ (-٨ب٢ك٥)(-٤ب٢ك٢)
(-٧ك)(-٤ك) ٢ك ى٢(-٣ك ى٢)

تمرين كتابي

اجب ما استطعت شفاهاً

(١) ٤ك(-٣ك) (٢) (-٥ك)(-٣ك)
(٣) (١٢ب ك٢)(-٤ب ك) (٤) (-٦ك ى٢)(-٧ك٢ى٢)
(٥) (-٧ب٢ك)(-٣ب ى٢) (٦) (-ب٢ت)(-ب٢ت٢ى)
(٧) م ن٢(-م٢ن) (٨) (٣ب ت)(٢ب٢)
(٩) (-٤ك ى)(-٦ك٢ى) (١٠) (-٨ب ت)٣ب٢
(١١) (-٣م٢ص) (-٤ب ص٢)
(١٢) ٥ك ى٢(-٨ك٢) (١٣) (-٦س٢د٢)(-٤س د)
(١٤) (-٩م٢ن٢)(١٢م ن٢) (١٥) (-٦ب٢ت٤)(-ب٢ت)
(١٦) ١٢ب ت . ٥/٦ ب ى (١٧) ١/٢ ب ك٢ . ٢/٣ ب٢ك٢
(١٨) (-٣ك٢ى٢ص)(-٨ك ى٢ص٢)
(١٩) ب ت . ب ك . ب ى (٢٠) -٣ب ك . ٥ب ى . ٢ك ى
(٢١) (٣ب ت٢)(-٢ب ت٣)(٣ت ى)

(٢٢) (ب ت)(٢ ب ك)(−٢ ت٢ ى)(−٤ ك ى)

(٢٣) ما هو مربع الكمية ؟

(٢٤) ما قيمة : (ك٢)٢ ؟ (−٥ ك)٢ ؟ (٣ ك ى)٢ ؟ (−٢ ك٢)٢ ؟

(٢٥) ما قيمة : (ك٢)٣ ؟ (−٣ ك)٤ ؟ (−٢ ب٢)٣ ؟ (−½ م٢)٢ ؟

(٢٦) كم مرة تتكرر ٢ كضلع في ٢٠٢ ؟

(٢٧) كم مرة تتكرر م كضلع في م٥٠م٨ ؟

(٢٨) كم مرة تتكرر ب كضلع في ب٢ ك٢ . ب٥ ك٦ ؟ كم مرة تتكرر ك ؟

(٢٩) ما العدد الذي تضربه في نفسه ليحصل : ٢٥ ؟ ٦٤ ؟ ٦٤ ب٢ ؟

(٤٠) ما الجذر المالي لـ : ٢٥ ؟ ٦٤ ب٢ ؟ ٤ م٢ ؟ ٤٩ ب٢ ت٤ ؟

(٤١) ما قيمة : $\sqrt{٩}$ ؟ $\sqrt{٢٥ ب^٢}$ ؟ $\sqrt{٨١ ك^٤}$ ؟ $\sqrt{٢٤٩ ل^٢}$ ؟

(٤٢) قاعدة مستطيل ٥ ك متراً وارتفاعه ٢ ك فما محيطه ومساحته ؟

(٤٣) قاعدة مثلث ٨ ى متراً وارتفاعه ١٥ ى فما مساحته ؟

٨٣. الضرب في حدٍ واحد نبسطه بالامثلة الآتية :

٤ قير ٢ قدم	٤ ك + ٢ ى	٤ ك − ٢ ى
٢	٢	− ٢
٨ قير ٦ قدم	٨ ك + ٦ ى	− ٨ ك + ٦ ى

٤ ك − ١	٢ ب٢ − ٢ ب ت + ت٢
− ٢ ك	− ٢ ب ت
− ٨ ك٢ + ٢ ك	− ٢ ب٢ ت + ٦ ب٢ ت٢ − ٢ ب ت٢

ففي الامثلة المارّ ذكرها ضربنا كل حدٍّ من حدود المضروب في الحدّ (المضروب فيه) وراعينا قوانين المسميات والعلامات والدلائل

تمرين كتابي

(١) ٢ب (٥ب - ٨)
(٢) ٢ك (ك^{٢} - ٤ك + ٥)
(٣) ٧ك ى (ك - ٤ى)
(٤) ٦ (½ك - ¼ى)
(٥) ٢ب ك (٣ب + ٢ك)
(٦) - ٥ك ى (٢ك - ٣ى)
(٧) ٢٠ك ى (٤ك^{٢}ى - ك ى^{٢})
(٨) - ٤ (٣ك + ٥ى)
(٩) - ٥ (٧ب - ٣ت)
(١٠) ٥ب ن ٨ (ب ى^{٢} - ٣م^{٢}ن)
(١١) - ٧م^{٢}ن (م - م^{٢} - ٣م^{٣})
(١٢) ٣ك ى (٨ك^{٢}ى - ٥ك ى^{٢} - ى^{٣})
(١٣) ب^{٢}ت^{٢} (ب + ت + س)
(١٤) ٣ب ك (٣ب^{٢} - ٥ب ك + ٢ك^{٢})
(١٥) ٣ك ى (ك - ى)
(١٦) - ٤ك (٣ك^{٢} + ٣ك - ١٠)
(١٧) ٥ب^{٢} (٣ب^{٢} - ٥ب^{٢} + ٧)
(١٨) - ٣ك^{٢} (٦ك^{٤} - ٧ك^{٣} + ٥ك^{٢})
(١٩) - ٢ى^{٢} (- ٢ى^{٢} + ٣ى د + ٤ك^{٢})
(٢٠) - ك^{٣} (ك^{٥} - ك^{٤} + ٥ك^{٣})
(٢١) - ٣م ن (٤م^{٢} - ٣م ن + ٢ن^{٢})
(٢٢) ٢م (٥م^{٢} - ٤م ن + ٣ن^{٢})
(٢٣) ك^{٢}ى (ك^{٣} - ٣ك^{٢}ى + كى^{٢})

(٢٤) $-٥ب ت (ب^٢ - ٢ب ت - ٧ب^٢)$

(٢٥) $-٥ك (ك^٢ - ك^٢ + ٢ك - ٤)$

٨٤. الضرب في كمية ثنائية بسيط لانه نظير ضرب الاعداد المؤلفة من رقمين كما في الامثلة الآتية :

٢١	١٠+٢	١+٣ك
٣٢	٣٠+٢	٢+٣ك
٤٣	٤٠+٢	٣+٤ك
٦٣	٦٠٠+٣٠	٣ك+٦ك^٢
٦٧٢	٦٠٠+٧٠+٢	٢+٧ك+٦ك^٢

وهو يتم بضرب كل حدّ من المضروب في كل حدّ من المضروب فيه وكتابة الحدود المتشابهة بعضها تحت بعض ثم اصلاحها

(١) $ب+ت$ $\quad$ $٣ك^٢ - ٤ك ى - ى^٢$

$ب+ت$ $\quad$ $٣ك - ٥ى$

$ب^٢+ب ت$ $\quad$ $٦ك^٢ - ٨ك^٢ى - ٣ك ى^٢$

$ب ت+ت^٢$ $\quad$ $-١٥ك^٢ى + ٣٠ك ى^٢ + ٥ى^٢$

$ب^٢+٢ب ت+ت^٢$ $\quad$ $٦ك^٢ - ٢٣ك^٢ى + ١٨ك ى^٢ + ٥ى^٢$

نستنتج من (١) ان مربع مجموع حدّين يساوي مربع الحدّ الاول مع مضاعف حاصل الحدين مع مربع الحدّ الثاني . فانتبه له جيداً

تمرين كتابي

اجب ما استطعت شفاهًا

ما مربع :

(١) ك+ى ؟ (٢) ب+ك ؟ (٣) ت+ى ؟
(٤) م+ن ؟ (٥) م+١ ؟ (٦) م+٢ ؟
(٧) ب+١ ؟ (٨) ب+٢ ؟ (٩) ب+٣ ؟
(١٠) ٢٠+١ ؟ (١١) ٢٠+٢ ؟ (١٢) ٣٠+١ ؟
(١٣) ك+٣ ؟ (١٤) ك+٤ ؟ (١٥) ب+٧ ؟
(١٦) ٢ب+١ ؟ (١٧) ٣ب+١ ؟ (١٨) ٤ك+١ ؟
(١٩) ٢ب+٣ ؟ (٢٠) ل+١٠ ؟

اضرب ما يأتي :

(٢١) (ب+٣)(ب+٣) (٢٢) (ب+٣)(ب−٣)
(٢٣) (ب−٣)(ب+٣) (٢٤) (ب−٣)(ب−٣)
(٢٥) (ب−٣)(ب−٣) (٢٦) (٢ب−٣)(٢ب−٣)
(٢٧) (ك+١١)(ك+١٣) (٢٨) (ى−٧)(ى−١٥)
(٢٩) (ص−٨)(ص−١٠) (٣٠) (م+٤)(م−١٢)
(٣١) (٢م+٥)(٣م+٣) (٣٢) (٦م−٣)(٤م+٥)
(٣٣) (٤ل−٥)(٦ل−٣) (٣٤) (٨ك−٣)(٥ك−٤)

(٣٥) (٥م - ٦ن) (٣م + ٤ن)

(٣٦) (٣ك^{٢} - ٥ى^{٢})(٤ك^{٢} + ٣ى^{٢})

(٣٧) (٥ك^{٢} + ٦ى^{٢})(٢ك^{٢} + ٩ى^{٢})

(٣٨) (٣م - ٤ن^{٢})(٤م - ٧ن^{٢}) (٣٩) (ك - ١)(ك^{٢} + ٢ك - ٣)

(٤٠) (ك - ى)(ك^{٢} + ك ى + ى^{٢})

(٤١) (ك + ى)(ك^{٢} - ك ى + ى^{٢})

(٤٢) (م - ٢)(م^{٢} - ٤م + ٣) (٤٣) (٢ب + ٣)(ب^{٢} - ٢ب - ٤)

(٤٤) (ك - ٢ى)(ك^{٢} - ٣ك ى + ٢ى^{٢})

(٤٥) (٢ى + د)(٣ى^{٢} + د^{٢} - ٢ى د)

(٤٦) (ك + ٢)(ك^{٣} + ٢ك^{٢} + ك + ٣)

(٤٧) (٢ك + ١)(٤ك^{٣} + ٣ك^{٢} + ٢ك - ١)

(٤٨) (ك - ى)(ك^{٣} + ك^{٢}ى + ك ى^{٢} + ى^{٣})

(٤٩) (ب + ت)(ب^{٣} - ب^{٢}ت + ب ت^{٢} - ت^{٣})

(٥٠) (٣ك - ٥)(٢ك + ٧)(ك - ٥)

(٥١) (٤ب^{٢} - ت^{٢})(ب^{٢} - ٣ت^{٢})(ب^{٢} + ت^{٢})

(٥٢) ما مساحة مستطيل طوله (٥ك + ى) متراً وعرضه (٢ك - ى) ؟

(٥٣) ما حجم بئر مكعبة عمقها (٢ب - ت) ذراعاً ؟

(٥٤) ما ثمن (م + ٢ن) كرسياً اذا كان سعر الكرسي (م - ن) غرشاً ؟

(٥٥) سار رجل (س + ٨) ساعة بسرعة (م + ٣) ميلاً في الساعة. فكم المسافة التي قطعها ؟

القسمة

٨٥. درسنا في الحساب ان ٤ × ٣ = ١٢ وان ١٢ ÷ ٣ = ٤ و ١٢ ÷ ٤ = ٣

وهكذا في الجبر فان (−٣ب^{٢}) (−٤ب^{٢}) = ١٢ب^{٠} وعليه ١٢ ب^{٠} ÷ (−٣ب^{٢}) = −٤ب^{٢} و ١٢ب^{٠} ÷ (−٤ب^{٢}) = −٣ب^{٢}

وكذلك (٣ب^{٢}) (−٧ب^{٣}) = −٢١ب^{٥} فاذًا (−٢١ب^{٥}) ÷ (٣ب^{٢}) = −٧ب^{٣} و (−٢١ب^{٥}) ÷ (−٧ب^{٣}) = ٣ب^{٢}

فاذًا قانون العلامات في القسمة مثل قانون العلامات في الضرب اي اذا اتفقت العلامات فالخارج ايجابي وان اختلفت فهو سلبي

٨٦. القسمة على حدٍ واحد . اذا قسمنا حدًا على حدٍ آخر فاننا

(١) نقسم مسمى المقسوم على مسمى المقسوم عليه

(٢) نجعل دليل كل حرف في الخارج الباقي من طرح دليله في المقسوم عليه من دليله في المقسوم

(٣) نضع علامة الخارج "+" اذا اتفقت علامتا المقسوم والمقسوم عليه والاّ "−" اذا اختلفتا اي ان

+ ÷ + = + + و − ÷ − = +

+ ÷ − = − − و − ÷ + = −

مثاله : ٢٨ك^{٢}ى^{٣} ص^{٥} ÷ −١٤ك ى^{٢} ص^{٣} = −٢ك ى ص^{٢}

تمرين كتابي

اجب ما استطعت شفاهًا

اقسم :

(١) $ى^{٦} + ى^{٤}$ (٢) $م^{٧} + م^{٢}$ (٣) $ر^{٨} + ر$

(٤) $ت^{٩} + ت^{٤}$ (٥) $ب^{٢}ت^{٢} + ب ت$

(٦) $ك^{٦}ى^{٢} + ك^{٢}ى$ (٧) $م^{٤}ن^{٦} + م^{٤}ن$

(٨) $ك^{٥}ى^{٥} + ك^{٤}ى^{٢}$ (٩) $١٢ ب^{٢} + ٣ب^{٢}$

(١٠) $١٨ك^{٤} + ٦ك^{٢}$ (١١) $٣٠م^{٢}ن^{٢} + ٥م^{٢}ن$

(١٢) $٢٨ل^{٤}م^{٢} + ٧ل^{٢}م$ (١٣) $-١٤ م ن + -٧ن$

(١٤) $١٨ب^{٢}ث + -٣ب ث$

(١٥) $-١٢ك ى^{٢} + -٦ك ى^{٢}$ (١٦) $-٢٤ب^{٢}ت + ٨ب^{٢}$

(١٧) $-٣٤م^{٢}ن^{٢} + ١٧م ن^{٢}$ (١٨) $٤٠ك^{٥}ى^{٦} + -٨ك^{٢}ى^{٢}$

(١٩) $-٣٣ب^{٢}ت^{٤}ى + -٤ب ت^{٤}ى$

(٢٠) $٣٥ك^{٥}ى^{٢}ص^{٢} + -٧ك^{٢}ى^{٢}$

(٢١) $-٤٤ب^{٥}ك ى^{٣} + -٤ب^{٤}ى^{٢}$

(٢٢) $٧٥ك^{٥}ى^{٤}ص^{٢} + -١٥ك ى^{٢}$

(٢٣) $-٦٤ك^{٨}ى^{٦} + ٨ك^{٧}ى^{٦}$

(٢٤) $-٤٢ب ت^{٢}ى^{٥} + -٧ب^{٢}ى^{٤}$

(٢٥) $-٦٠ك^{٤}ى^{٥}ص^{٦} + -١٢ك^{٢}ى^{٢}ص^{٤}$

(٢٦) ٨٤ ى^{٥} ل^{٦} + − ١٢ ى^{٤} ل

(٢٧) ٣^{٤} + ٣^{٢} (٢٨) ٢^{٦} + ٢^{٢} (٢٩) ٢^{١٠} + ٢^{٦}

لقسمة كمية على حدٍ واحد نقسم كل حدٍ من حدودها على المقسوم عليه مع ملاحظة العلامات

مثال: ١٢ ك^{٢} − ٦ ك^{٢} + ٣ ك + − ٣ ك

١٢ ك^{٢} − ٦ ك^{٢} + ٣ ك (− ٣ ك

− ٤ ك^{٢} + ٢ ك − ١

تمرين خطي

اقسم:

(١) ٥ ب − ١٠ ت على ٥ (٢) ١٢ م − ٨ ن على ٤

(٣) ١٥ ك^{٢} − ١٨ ى^{٢} على ٣ (٤) ٩ ك^{٢} − ٧ ك على ك

(٥) ١٨ م^{٣} − ١٢ م على ٣ م (٦) ٦ ك^{٤} − ٣ ك^{٢} على − ٣ ك

(٧) ١٢ م^{٢} ن − ١٨ م ن^{٢} على − ٦ م ن

(٨) − ٣٣ ب^{٥} ت^{٢} + ٤٤ ب^{٢} ت^{٥} على ١١ ب^{٢} ت^{٢}

(٩) ٢٠ ك^{٢} − ٨ ك ى على ٤ ك

(١٠) ٤ ب ت^{٢} − ٦ ب ت^{٢} ى على − ٢ ب ت

(١١) ٦ ك^{٢} + ١٢ ك^{٢} + ٣ ك على ٣ ك

(١٢) ٤ ب^{٢} ت^{٢} + ٨ ب^{٢} ت^{٢} + ١٨ ب ت على − ٢ ب ت

٨٨. القسمة على كمية ثنائية . وهذا نمثله بما يأتي :

(١) $(٥ك+١٥)+(ك+٣)=٥$ (٢) $(٤ك-١٦)+(ك-٤)=٤$

(٣) $(٨ك^{٢}-٨ك)+(-ك+١)=-٨ك$

(٤) $(٣ك^{٢}+٦)+(ك^{٢}+٢)=٣$

(٥) $(٦ك^{٢}+١٧ك^{٢}+١٦ك+٦)+(٣ك+٣)=؟$

$$\begin{array}{r|l} ٣ك^{٢}+٤ك+٢ & \\ \hline ٦ك^{٢}+١٧ك^{٢}+١٦ك+٦ & (٢ك+٣ \\ ٦ك^{٢}+٩ك^{٢} & \\ \hline ٨ك^{٢}+١٦ك & \\ ٨ك^{٢}+١٢ك & \\ \hline ٤ك+٦ & \\ ٤ك+٦ & \\ \hline \end{array}$$

في نومرو ٥ وما هو على شاكلته نظّم حدود المقسوم والمقسوم عليه باعتبار قوات كمية واحدة فيهما ثم نقسم الحدّ الاول من المقسوم ٦ك^{٣} على الحد الاول من المقسوم عليه فيخرج اول حدّ من الخارج ٣ك^{٢} . ثم نضرب ٣ك^{٢} في كل حدّ من المقسوم عليه ونطرح الحاصل من المقسوم ونجعل الباقي مقسومًا جديدًا ونعمل جريًا

تمرين كتابي

اقسم ما يأتي :

(١) ك^{٢}+٧ك+١٠ على ك+٢ (٢) ك^{٢}+٥ك+٦ على ك+٣

(٤) $ك^{٢}+٨ك+١٢$ على $ك+٢$ (٤) $ى^{٢}+٨ى+١٥$ على $ى+٥$

(٥) $م^{٢}+١٣م+١٢$ على $م+١$ (٦) $ب^{٢}+١٠ب+٢٤$ على $ب+٦$

(٧) $د^{٢}-١٨د+٢٢$ على $د-٢$ (٨) $ت^{٢}+٧٢-١٧ت$ على $ت-٩$

(٩) $ت^{٢}+ت-٢٠$ على $ت+٦$ (١٠) $ك^{٢}+٦ك ى+٨ى^{٢}$ على $ك+٢ى$

(١١) $ب^{٢}+٧ب ت+١٢ب^{٢}$ على $ب+٣ت$

(١٢) $٢ك^{٢}+٣ك+١$ على $ك+١$ (١٣) $ب^{٢}-٦ب-٢٧$ على $ب-٩$

(١٤) $م^{٢}+م-٢٠$ على $م+٥$ (١٥) $ن^{٤}-٥ن^{٢}-٢٤$ على $ن^{٢}+٣$

(١٦) $ك^{٢}-١٦ب ك+٥٥ب^{٢}$ على $ك-٥ب$

(١٧) $ب^{٢}-٣ب ت-١٠٨ت^{٢}$ على $ب+٩ت$

(١٨) $ك^{٤}+٦ك^{٢}ى-٢٧ى^{٢}$ على $ك^{٢}-٣ى$

(١٩) $١٢ك^{٢}-٥ك-٢$ على $٣ك-٢$

(٢٠) $٢ك^{٢}+ك ى-١٠ى^{٢}$ على $٢ك+٥ى$

(٢١) $٦ك^{٤}-٧ك^{٢}-٥$ على $٣ك^{٢}-٥$

(٢٢) $١٨م^{٨}-٤٣م^{٤}+٢٠$ على $٢ك^{٤}-٥$

(٢٣) $٦ك^{٣}+١٣ك^{٢}+٨ك+٣$ على $٢ك+٣$

(٢٤) $١٢ل^{٣}+١٩ل^{٢}+١١ل+٢$ على $٣ل+١$

(٢٥) $١٥ب^{٣}+٢٢ب^{٢}ت+١٧ب ت^{٢}+٦ت^{٣}$ على $٣ب+٢ت$

(٢٦) $١٠م^{٣}-٤٧م^{٢}ن+١٥م ن^{٢}-٢٨ن^{٣}$ على $٢م-٧ن$

(٢٧) $٣م^{٤}+٥م^{٣}-٨م^{٢}+١١م-٢٠$ على $م+٤$

تمرين شفهي

(١) اجرة بيت في الشهر ل ليرة فكم تكون اجرته في السنة ؟
(٢) كيف تكتب حاصل ضرب كميتين مثل ب وت ؟
(٣) كيف تكتب خارج قسمة كمية على اخرى ؟
(٤) عمر رجل س سنة فمنذ كم سنة كان عمرهُ نصف عمرهِ الآن ؟
(٥) ما هو مجموع ½ ب و⅔ ت ؟
(٦) حنفية تملأ حوضًا يسع ج جرة في د دقيقة فكم جرة تصبّ في الدقيقة
(٧) ٢ اعداد متتالية اكبرها ٢ع فما العددان الباقيان ؟
(٨) سارت دراجة س ساعة بسرعة م ميلاً في الساعة فكم المسافة التي قطعتها ؟
(٩) ثمن ٢ كتب غ غرشًا فكم يكون ثمن ك كتابًا ؟
(١٠) محيط مربع م مترًا فكم هو طول جانبهِ ؟
(١١) طول مستطيل ى بردًا وعرضهُ ل بردًا فكم محيطهُ ؟
(١٢) ما حجم صندوق طولهُ ط قدمًا وعرضهُ ع وعمقهُ ل ؟
(١٣) كم قدمًا مربعة في ى بردًا مربعًا ؟
(١٤) كم بردًا مكعبًا في ق قدمًا مكعبةً ؟

تمرين موقت

الوقت دقيقتان

اكتب حاصل ضرب الكميات الآتية :

(١) (ب + ت)(ب + ت) (٢) (ك + ى)(ك + ى)

(٣) (ب + ك)(ب + ك)　　(٤) (ى + ب)(ى + ب)

(٥) (ك + ١)(ك + ١)　　(٦) (ك + ٢)(ك + ٢)

(٧) (ك + ٣)(ك + ٣)　　(٨) (ك + ٢)(ك − ٣)

(٩) (ك − ٢)(ك − ٣)　　(١٠) (ب + ١)(ب + ٢)

(١١) (٢ك + ١)(٢ك + ١)　　(١٢) (١ + ٣ك)(١ + ٣ك)

(١٣) (٢ك − ى)(ك + ى)　　(١٤) (٢ك − ى)(ك − ى)

متوسط الاصابات ١٠

تمرين موقت

الوقت دقيقتان

١ اكتب خارج قسمة الكميات الآتية :

(١) $\frac{٢ك}{ك}$　　(٢) $\frac{٢ك}{٢}$　　(٣) $\frac{٤ك}{٢ك}$

(٤) $\frac{٤ك^{٢}}{ك}$　　(٥) $\frac{٤ك^{٢}}{٢ك}$　　(٦) $\frac{٢٠ب^{٤}}{٥ب}$

(٧) $\frac{٢٨٦}{٢}$　　(٨) $\frac{ب^{٢}+ب}{ب}$　　(٩) $\frac{٤ب^{٢}+٤ب^{٢}}{٢ب}$

(١٠) $\frac{٦ك+٩ى}{٣}$　　(١١) $\frac{٨ك-٤ى}{٢}$　　(١٢) $\frac{٨ك^{٢}-٦ك^{٢}}{٢ك^{٢}}$

(١٣) $\frac{١٦ك^{٢}}{-ك}$ (١٤) $\frac{١٦ب^{٢}-٤ب}{-٢ب}$ (١٥) $\frac{٤ك-٢٨}{ك-٧}$

(١٦) $\frac{٢١-٤ك}{٧-ك}$ (١٧) $\frac{٥ك^{٢}-٢٠ى}{ك^{٢}-٤ى}$ (١٨) $\frac{٥ك^{٢}-٢٠ى^{٢}}{ك^{٢}-٤ى^{٢}}$

القسم الثاني

٨٩. الضرب طريقة او عملية لمعرفة النتيجة (الحاصل) اذا كررنا عددًا (المضروب) بقدر آحاد عدد آخر (المضروب فيه). وهذا التحديد خاص وليس عامًا ولكنه كافٍ في هذا المقام

٩٠. ضرب الكميات المركبة. يقتضي تنظيم الكميات قبل الضرب تسهيلاً لاصلاح الحواصل المتشابهة وهذا يتم بترتيب الحدود باعتبار قوات احد احرفها مبتدئًا من الاعلى فما دونه او بالعكس ثم نضرب كل حدّ من المضروب في كل حدٍّ من المضروب فيه ونصلح الحدود المتشابهة

ما حاصل: $٥ك^{٢}-٣ك+١+ك^{٢}$ في $٢+٤ك^{٢}-٣ك$ ؟

$$\begin{array}{r}
ك^{٢}+٥ك^{٢}-٣ك+١ \\
٤ك^{٢}-٣ك+٢ \\
\hline
٤ك^{٥}+٢٠ك^{٤}-١٢ك^{٣}+٤ك^{٢} \\
-٣ك^{٤}-١٥ك^{٣}+٩ك^{٢}-٣ك \\
٢ك^{٣}+١٠ك^{٢}-٦ك+٢ \\
\hline
٤ك^{٥}+١٧ك^{٤}-٢٥ك^{٣}+٢٣ك^{٢}-٩ك+٢
\end{array}$$

تمرين كتابي

اضرب ما يأتي:

(١) $٢(ب+ت)^{٢}$ $\times$ $٢(ب+ت)^{٢}$

(٢) $٤(٢م+ل)$ $\times$ $-٩(٢م+ل)$

(٣) $-٥(ب-ت)^{٢}$ $\times$ $-٤(ب-ت)^{٢}$

(٤) $-٧(ك-ى)^{٢}$ $\times$ $٢(ك-ى)^{٢}$

(٥) $(٣ب-٢ل)(٤ب-٣ل)$

(٦) $(٤م^{٢}-ل^{٢})(م^{٢}-٣ل^{٢})$

(٧) $(ل+م+ن)(ل-م-ن)$

(٨) $(ك^{٢}+٤ك+٤)(ك^{٢}-٤ك+٤)$

(٩) $(م+ص-ن)(م-ص+ن)$

(١٠) $(٢ب-٣ت+ى)(٢ب-٣ت-ى)$

(١١) $(ب^{ن}-ت^{ن})(ب^{ن}+ت^{ن})$

(١٢) $(ك^{ن}+ل^{ن})(ك^{ن}+ل^{ن})$

(١٣) $(٣م^{٢}-٤م+٢)(٢م^{٢}-٥م-٣)$

(١٤) $(٥ب^{٢}-ب ت-٢ت^{٢})(٢ب^{٢}+٣ب ت-٤ت^{٢})$

(١٥) $(٤ك-٣ك^{٢}-٥+٢ك^{٣})(ك+٤)$

(١٦) $(٣ك^{٢}-٥-ك)(ك+٤ك^{٢}-٣)$

(١٧) (ك+ى+ب) (ك+ى-ت)

(١٨) (ك+ب-ت) (ك-ب+ت)

(١٩) (م^{٢}-م ن+ن^{٢})(م^{٢}+م ن+ن^{٢})

(٢٠) (ب^{٢}+ت^{٢}+ى^{٢}-ب ت-ب ى-ت ى) (ب+ت+ى)

٩١. القسمة طريقة لمعرفة احد ضلعي الحاصل اذا وجد الحاصل والضلع الآخر

٩٢. المقسوم هو حاصل الضلعين فهو الكمية التي يجب قسمتها على الضلع المفروض

٩٣. المقسوم عليه هو الضلع المفروض

٩٤. الخارج هو الضلع المجهول او نتيجة القسمة

مثاله: ١٥ ك^{٤}م^{٥}+٥ ك^{٣}م^{٣}-٣ ك م^{٢} هنا ١٥ ك^{٤}م^{٥} المقسوم و ٥ ك^{٣}م^{٣} المقسوم عليه و ٣ ك م^{٢} الخارج

تكتب قسمة م على ل باحدى الطرق الآتية: م÷ل . م:ل . م/ل .

$\frac{م}{ل}$. م (ل)

٩٥. قسمة الكميات المركبة. تنظم الكميات بموجب قوة احد الحروف المتناقصة واقسم كما مرّ بك

مثاله: اقسم م^{٤}+م^{٣}ل^{٢}+ل^{٤} على م^{٢}-م ل+ل^{٢}

$$م^٢ + م ل + ل^٢) \quad م^٤ + م^٢ ل^٢ + ل^٤ \quad (م^٢ - م ل + ل^٢$$
$$م^٤ - م^٣ ل + م^٢ ل^٢$$
$$م^٣ ل + ل^٤$$
$$م^٣ ل - م^٢ ل^٢ + م ل^٣$$
$$م^٢ ل^٢ - م ل^٣ + ل^٤$$
$$م^٢ ل^٢ - م ل^٣ + ل^٤$$

رتّب واقسم ما يأتي :

(١) $٦٥ ك - ١٥ ك^٢ - ٦٤ + ك^٣$ على $ك - ٧$

(٢) $٥ ك^٢ + ٥ ك - ٢٥ ك^٣ - ١$ على $٥ ك^٢ - ١$

(٣) $٤ ى^٣ + ٦ ك^٦ - ١٢ ك^٤ ى$ على $٢ ك^٢ - ٣ ى$

(٤) $٩ ك - ١٨ ك^٣ + ٨ ك^٤ - ١٢ ك^٢ + ٣$ على $٤ ك^٢ + ك - ٣$

(٥) $١٠ - م^٣ - ٢٧ م^٢ + ١٢ م^٤ - ٣ م$ على $م + ٤ م^٢ - ٣$

(٦) $٥ م^٤ ل - ٣ م^٢ ل^٢ - م^٣ ل^٢ + ٣ م^٥ - ٤ ل^٥$ على $م^٢ + ٣ م ل + ٢ ل^٢$

(٧) $٢٣ ب^٢ + ب^٤ - ٥٥ ب + ١١ ب^٣ - ١٤٠$ على $ب^٢ - ٥$

(٨) $ك^٤ - ٣ م^٢ ك^٢ + م^٤$ على $ك^٢ - م ك - م^٢$

(٩) $ب^٤ + ٤ ت^٤ + ٣ ب^٢ ت^٢$ على $٢ ت^٢ + ب^٢ - ب ت$

(١٠) $٢٥ ك^٣ - ١٠ ك^٢ + ٤٠ ك - ١٨$ على $٥ ك - ٦$

(١١) $ك^٢ + ى^٢$ على $ك + ى$ (١٢) $ك^٢ - ى^٢$ على $ك - ى$

(١٣) $ب^٢ - ١٢٥ ت^٢$ على $ب - ٥ ت$

(١٤) $ك^٤ + ى^٤$ على $ك + ى$ (١٥) $ك^٤ - ى^٤$ على $ك - ى$

(١٦) $ك^{٤} - ى^{٤}$ على $ك + ى$ (١٧) $ك^{٤} - ١٦ ى^{٤}$ على $ك - ٢ ى$

(١٨) $ك^{٥} + ى^{٥}$ على $ك + ى$ (١٩) $ك^{٥} - ى^{٥}$ على $ك + ى$

(٢٠) $م^{٥} + ٣٢ ل^{٥}$ على $م + ٢ ل$

(٢١) $ك^{٤} + ك^{٢} + ١$ على $ك^{٢} + ك + ١$

(٢٢) $ك^{٤} + ك^{٢} م^{٢} + م^{٤}$ على $ك^{٢} + ك م + م^{٢}$

(٢٣) $م^{٢} - ب^{٢} - ٢ ب ت - ت^{٢}$ على $م - ب - ت$

(٢٤) $ب^{٢} - ٢ ب ت + ت^{٢} - ل^{٢}$ على $ب - ت + ل$

(٢٥) $ب^{٢} - ك^{٢} + ٤ ك ى - ٤ ى^{٢}$ على $ب + ك - ٢ ى$

(٢٦) $م^{٢} + ٢ م ن + ن^{٢} - ل^{٢}$ على $م + ن - ل$

(٢٧) $ب^{٢} + ت^{٢} + ث^{٢} - ٢ ب ت ث$ على $ب + ت + ث$

الفصل السادس

اختصارات الضرب والقسمة – البسط

القسم الاول

٩٦. حفظنا جيداً جدول الضرب في الحساب لاهميته في عمليات الضرب والقسمة وحل الاضلاع

مثاله: نعلمنا ان ٦×٧=٤٢ و ٤٢÷٧=٦ و ٤٢÷٦=٧

وكثيراً ما يرد في الجبر كميات يجب ان نضربها او نقسمها او نحللها الى اضلاع بالذهن او شفاهاً وعليه يجب على الطالب ان يدرسها جيداً لكي يسهل عليه كتابة نتائجها فوراً بدون تردد و يحفظها جيداً كما حفظ جدول الضرب

٩٧. تربيع الحدّ. ما معنى ك^{٢}؟ (ك ى)^{٢}؟ (٣م^{٢}ن^{٢})^{٢}؟

جد مربع ما يأتي بالضرب: (١) (٢ك ى)^{٢} (٢) (٣ب^{٢}ت^{٣})^{٢}

(٣) (–٥م^{٢}ل^{٤})^{٢}

قابل دليل كل حرف في الجواب مع دليله في الحد المفروض. ماذا تجد؟

يربّع الحد بتربيع معاملهُ وضرب دليل كل حرف في ٢

تمرين شفهي

(١) ماذا تكون علامة مربع الحد؟ (٢) احفظ جيداً مربع الاعداد من ١ – ٣٠

ما قيمة: $(ب^{٢}ت)^{٢}$ ؟ $(-ب^{٢}ت^{٣})^{٢}$ ؟ $(٣ك^{٢})^{٢}$ ؟
$(ب ت^{٢}ى)^{٢}$ ؟ $(-٥م)^{٢}$ ؟ $(-٤ك ى)^{٢}$ ؟ $(-٨ب^{٢}ت)^{٢}$ ؟
$(٩م^{٢}ب^{٢})^{٢}$ ؟ $(-١١م^{٢}ص ل^{٢})^{٢}$ ؟ $(١٤م ك ل^{٢})^{٢}$ ؟
$(-١٢ب^{٢}ت^{٤})^{٢}$ ؟ $(-١٥ك^{٢}ى)^{٢}$ ؟

٩٨. مربع مجتمع حدين. ذكرنا سابقاً ان مربع مجتمع حدّين يساوي مربع الحد الاول مع مضاعف حاصلها مع مربع الحدّ الثاني مثاله:

$$(ب + ت)^{٢} = ب^{٢} + ٢ب ت + ت^{٢}$$

$$(٣م + ٢ل)^{٢} = ٩م^{٢} + ١٢م ل + ٤ل^{٢}$$

٩٩. مربع فضلة* حدين. جد بالضرب قيمة $(ب - ت)(ب - ت)$

$ب - ت$	$٣م - ٢ل$
$ب - ت$	$٣م - ٢ل$
$ب^{٢} - ب ت$	$٩م^{٢} - ٦م ل$
$- ب ت + ت^{٢}$	$- ٦م ل + ٤ل^{٢}$
$ب^{٢} - ٢ب ت + ت^{٢}$	$٩م^{٢} - ١٢م ل + ٤ل^{٢}$

فاذاً مربع فضلة حدين يساوي مربع الحدّ الاول الاّ مضاعف حاصلها مع مربع الحدّ الثاني. مثاله

$$(٣د ل - ٢م)^{٢} = ٩د^{٢}ل^{٢} - ١٢د ل م + ٤م^{٢}$$

$$٢٤٠١ = ٢(٥٠ - ١)^{٢} = ٢٥٠٠ - ٢(٥٠ \times ١) + ١^{٢}$$

* يراد بفضلة حدّين الفرق بينها اي الاول الاّ الثاني ففضلة ب و ت = ب – ت

تمرين شفهي وكتابي

اكتب لاول نظرة مربع ما يأتي :

(١) ب + ك (٢) ب + ٦ (٣) م + ن
(٤) ت + ٩ (٥) ٧ + ل (٦) ب − ك
(٧) ب − ٦ (٨) م − ن (٩) ت − ٩
(١٠) ٧ − ل (١١) ك − ى (١٢) ك + ى
(١٣) س + د (١٤) ٢ل + ٢ (١٥) ٢ل − ٥
(١٦) ٧ + ب ت (١٧) ٥ + ٤ل (١٨) ٨ م − ١
(١٩) ٢م + ٤ل (٢٠) ٢م − ٤ل (٢١) ٢م^{٢} + ٧ل^{٢}
(٢٢) ٥م ن + ٩ى^{٢} (٢٣) ٢ك^{٤} + ٥ك^{٢} (٢٤) ٦م^{٢}ل − ٧م ل^{٢}
(٢٥) ١٠ك^{٢}ى + ١ (٢٦) ٢ى^{٢} − ٤د^{٢} (٢٧) ١٠١
(٢٨) ٢٠٢ (٢٩) ٩٨ (٣٠) ١٠٠١

اقسم سريعاً ما يأتي :

(٣١) ب^{٢} + ٢ب ت + ت^{٢} على ب + ت
(٣٢) ب^{٢} − ٢ب ى + ى^{٢} على ب − ى
(٣٣) ب^{٢} − ٤ب + ٤ على ب − ٢ (٣٤) ٩م^{٢} − ٦م + ١ على ٣م − ١
(٣٥) ى^{٢} + ٤٠ى + ٤٠٠ على ى + ٢٠
(٣٦) ٩م^{٢} − ١٢م ل + ٤ل^{٢} على ٣م − ٢ل
(٣٧) ٤ب^{٢} − ٢٠ب + ٢٥ على − ٥ + ٢ب

(٣٨) ٤ل^{٢} - ١٢ل م + ٩م^{٢} على ٢ل - ٣م

جد المقسوم عليه الثنائي لكل من الكميات الآتية :

(٣٩) ب^{٢} - ٢ب ت + ت^{٢} (٤٠) ب^{٢} + ٢ب + ١

(٤١) س^{٢} + ٤س + ٤ (٤٢) ك^{٢} + ٤ك + ٤

(٤٣) ١٦ك^{٢} - ٨ك + ١ (٤٤) ١٦م^{٢} - ٨م ن + ن^{٢}

(٤٥) ٩م^{٤} - ٦م^{٢} + ١ (٤٦) ١٦ل^{٦} - ٤٠ل^{٣} + ٢٥

جد الكميتين الثنائيتين اذا كان حاصل ضربهما ما يلي :

(٤٧) س^{٢} + ٢س ص + ص^{٢} (٤٨) د^{٢} - ٢د + ١

(٤٩) ل^{٢} - ١٠ل + ٢٥ (٥٠) ٤م^{٢} - ٤م + ١

(٥١) ٤ص^{٢} + ١٢ص + ٩ (٥٢) ٩ب^{٢} ت^{٢} - ٦ب ت + ١

(٥٣) ١٦ل^{٤}م^{٢} - ٢٤ل^{٢}م ب + ٩ب^{٢}

(٥٤) ٢٥ك^{٤}ى^{٦} - ٦٠ك^{٣}ى^{٣}س^{٢} + ٣٦س^{٤}

١٠٠ . مرّ بنا ان الكمية المحصورة نظهر الحدّ بتعامل معاملته . فاذا عوضنا عن ب في العبارة (ب + ت)(ب + ت) = ب^{٢} + ٢ب ت + ت^{٢} بالكمية ل + م كان لنا [(ل + م) + ت][(ل + م) + ت] = (ل + م)^{٢} + ٢(ل + م)ت + ت^{٢} وبنزع الحواصر وبسط الكميات يحصل ل^{٢} + ٢ل م + م^{٢} + ٢ل ت + ٢م ت + ت^{٢}

والمهم انه اذا جعلنا (ل + م) حدًّا واحدًا وجرينا بموجب قانون تربيع الكميات الثنائية امكننا ان نربع الكمية الثلاثية ل + م + ت فوراً بالذهن دون كتابتها وبذات

الطريقة تربع (ل + م − ب) = [(ل + م) − ب][(ل + م) − ب]
= (ل + م)^{٢} − ٢(ل + م)ب + ب^{٢} = ل^{٢} + ٢ل م + م^{٢} − ٢ل ب − ٢م ب + ب^{٢}

تمرين كتابي

ربّع ما يأتي :

(١) [(ك + ى) + ١٠]
(٢) [(ب + ت) − ٥]
(٣) [(ب + ت) − ٥]
(٤) [(ل − م) + ٥]
(٥) [(ل + م) − ٣]
(٦) [(ل + م) + ن]
(٧) [(٢ب + ٣ت) + ١٠]
(٨) [(٣ل − ى) + ٥]
(٩) [(٢ك + ٣ى) − ١٠]
(١٠) [(ل م + ٥) − ن]
(١١) [(ب + ٥ ل) − ٢ى]
(١٢) [(٤ك − ٣ل) − ٢ن]
(١٣) ب + ت + ث
(١٤) ب + ت − ث
(١٥) ب + ت − ١٠
(١٦) ب + ت + ١٠
(١٧) ب − ت + ى
(١٨) ب − ت − ى
(١٩) ٣ب − ٢ت + ٥ ى
(٢٠) ٢ب − ٣ت − ٤ى
(٢١) ٤ى − ٢م − ١٠

١٠١. حاصل مجموع حدين في فضلتهما . اضرب ما يأتي وضع الحاصل كما في (١)

(١) (ك + ٣)(ك − ٣) = ك^{٢} − ٩
(٢) (م + ٧)(م − ٧) = م^{٢}

(٣) (ل + ١٠)(ل – ١٠) = ؟ (٤) (د + ٩)(د – ٩) = ؟

جد حاصل ما يأتي بذهنك . اكتب الجواب ثم اضرب وقابل النتائج

(١) (ب + ٦)(ب – ٦) = (٢) (ى + ٨)(ى – ٨) =

(٣) (ل + ٤)(ل – ٤) = (٤) (م + ٥)(م – ٥) =

(٥) (ل + م)(ل – م) = ؟ = ل^{٢} – م^{٢}

ومما مرّ نستنتج ان حاصل مجموع حدّين في فضلتهما يساوي فضلة مربعيهما اي مربع الحدّ الاول الاّ مربع الحدّ الثاني . فاذا لمعرفة الجواب ربّع الحد الاول ثم ربّع الثاني وضع بينهما "–"

تمرين كتابي

اجب ما استطعت شفاهاً

جد حاصل ما يأتي :

(١) (ك + ٣)(ك – ٣) (٢) (م + ٥)(م – ٥)

(٣) (ك + ى)(ك – ى) (٤) (ك + ل)(ك – ل)

(٥) (م + ١)(م – ١) (٦) (م + ١٠)(م – ١٠)

(٧) (٢ل – ٤)(٢ل + ٤) (٨) (٣ن + ٥)(٣ن – ٥)

(٩) (م^{٢} + ٣)(م^{٢} – ٣) (١٠) (ى^{٢} + ٤)(ى^{٢} – ٤)

(١١) (٢ى + ب)(٢ى – ب) (١٢) (٤ب + ٢ى)(٤ب – ٢ى)

(١٣) (٣ك ى – ٢)(٣ك ى + ٢) (١٤) (ك^{٢} – ٦)(ك^{٢} + ٦)

(١٥) $(م^{٢}+٤)(م^{٢}-٤)$ (١٦) $(٧م^{٢}-٩)(٧م^{٢}+٩)$

(١٧) $(١٠ك^{٢}-ى)(١٠ك^{٢}+ى)$ (١٨) $(ب^{٤}+ت^{٤})(ب^{٤}-ت^{٤})$

(١٩) $(ب^{٥}-ت^{٢})(ب^{٥}+ت^{٢})$ (٢٠) $(١١ك^{٢}-١)(١١ك^{٢}+١)$

(٢١) $(ك^{٥}-٩)(ك^{٥}+٩)$ (٢٢) $(ك^{٢}-٣ى)(ك^{٢}+٣ى)$

(٢٣) $(٤ب ت-ب^{٢})(٤ب ت+ب^{٢})$

(٢٤) $(٧ل م ن+١)(٧ل م ن-١)$

(٢٥) $[(ل+م)+٣][(ل+م)-٣]$

عوّض عن $(ل+م)$ بـ $ك$ فيكون : $(ك+٣)(ك-٣)=ك^{٢}-٩$

اي $[(ل+م)+٣][(ل+م)-٣]=(ل+م)^{٢}-٩$

$=ل^{٢}+٢ل م+م^{٢}-٩$ وهو الجواب

(٢٦) $[(ب+ت)-٥][(ب+ت)+٥]$

(٢٧) $[(م+ن)+٤][(م+ن)-٤]$

(٢٨) $[(ب+ت)+ى][(ب+ت)-ى]$

(٢٩) $[(٢ل+٣م)+ن][(٢ل+٣م)-ن]$

(٣٠) $[(ك-ب)+٣][(ك-ب)-٣]$

(٣١) $(ك+ب+٣)(ك+ب-٣)$

(٣٢) $(٢ل-م+ن)(٢ل-م-ن)$

(٣٣) $(ل+م+٥)(ل+م-٥)$ (٣٤) $(ك+ى+٧)(ك+ى-٧)$

اقسم بذهنك ما يأتي :

(٣٥) $(ب^{٢}-ت^{٢})\div(ب+ت)$ (٣٦) $(س^{٢}-د^{٢})\div(س-د)$

(٣٧) $(٩-ب^{٢})+(٣+ب)$ (٣٨) $(ل^{٢}-٣٦)+(ل-٦)$

(٣٩) $(٩م^{٢}-١٦)+(٣م+٤)$ (٤٠) $(ك^{٤}-١)+(ك^{٢}-١)$

جد المقسوم عليه الثنائي لكل من الكميات الآتية :

(٤١) $ك^{٢}-ى^{٢}$ (٤٢) $م^{٢}-١$ (٤٣) $٤ل^{٢}-٩$

(٤٤) $٣٥-١٦م^{٢}$ (٤٥) $٤-ى^{٢}$ (٤٦) $ى^{٦}-٣٥$

(٤٧) $م^{٢}-٤٩$ (٤٨) $٩س^{٢}-٦٤$

جد كميتين ثنائيتين حاصلها ما يأتي :

(٤٩) $ب^{٢}-ت^{٢}$ (٥٠) $س^{٢}-د^{٢}$ (٥١) $م^{٢}-١$

(٥٢) $ل^{٢}-٤$ (٥٣) $ص^{٢}-١٦$ (٥٤) $٩-٤ن^{٢}$

(٥٥) $ب^{٢}-٩$ (٥٦) $١٠٠-٩م^{٢}$

جد باخصر طريقة :

(٥٧) طول مستطيل ١٠٣ ذراعاً وعرضه ٩٨ فكم مساحته ؟

(٥٨) كم ثمن ٤٢ دزينة بيض اذا كان سعر الدزينة ٣٨ غرشاً ؟

(٥٩) كم ثمن ٨٣ برد قماش اذا كان ثمن البرد ٧٧ غرشاً ؟

١٠٣ . الحواصل التي تكون اضلاعها بشكل $(ك+ب)(ك+ت)$.

اذا ضربنا ما يأتي كان لنا

$ك+ب$	$م-٣ن$
$ك+ت$	$م+٥ن$
$ك^{٢}+ب ك$	$م^{٢}-٣م ن$
$+ت ك+ب ت$	$+٥م ن-١٥ن^{٢}$
$ك^{٢}+(ب+ت)ك+ب ت$	$م^{٢}+٢م ن-١٥ن^{٢}$

نستنتج من الامثلة المارة ان حاصل كميتين ثنائيتين فيهما حدٌ واحد مشترك هو كمية ثلاثية مؤلفة من :

(١) مربع الحد المشترك

(٢) مجموع الحدين المختلفين الجبري في الحد المشترك

(٣) حاصل الحدين المختلفين الجبري

فحاصل (ك − ٩) (ك + ٧) = (١) مربع الحد المشترك اي ك٢ و(٢) مجموع الحدين المختلفين الجبري في الحد المشترك اي (− ٩ + ٧ = − ٢) . ك و(٣) حاصل الحدين المختلفين الجبري اي (− ٩) . (٧) او − ٦٣

فهو اذاً ك٢ − ٢ ك − ٦٣

تمرين كتابي

اجب ما استطعت شفاهاً

ابسط :

(١) (ب + ١)(ب + ٢) (٢) (ب + ٣)(ب + ٣)

(٣) (ب + ٣)(ب + ٤) (٤) (ب + ٤)(ب + ٥)

(٥) (ب + ٥)(ب + ٦) (٦) (ب + ٣)(ب + ٧)

(٧) (ك + ٤)(ك + ٦) (٨) (م − ٣)(م − ٥)

(٩) (ى − ٣)(ى − ٨) (١٠) (ب − ١٤)(ب − ١١)

(١١) (ل + ١)(ل − ٣) (١٢) (ل − ٣)(ل + ٣)

(١٣) (ل − ٣)(ل + ٤) (١٤) (ل − ٤)(ل + ٥)

(١٥) (ل − ٥)(ل + ٦) (١٦) (٢ل + ٣)(٢ل + ٤)

(١٧) (٢ل + ٣)(٢ل + ٣) (١٨) (٣ح + ١)(٣ح + ٤)

(١٩) (٢ى + ٣)(٢ى + ٥) (٢٠) (٢ى + ٣)(٢ى - ٥)

(٢١) (٢ب + ١)(٢ب - ٥) (٢٢) (٤ب + ٣)(٤ب - ٥)

(٢٣) (٥ل م + ١)(٥ل م - ٧)

(٢٤) (٤ب - ٣ت)(٤ب + ٥ت) (٢٥) (ك + م)(ك + ى)

(٢٦) (ى + ل)(ى - م) (٢٧) (ك - ل)(ك - م)

(٢٨) [(ب + ت) + ٢][(ب + ت) + ٦] = ؟

عوّض عن (ب + ت) بـ ك فينتج (ك + ٢)(ك + ٦)

= ك٢ + ٨ك + ١٢ اي [(ب + ت) + ٢][(ب + ت) + ٦]

= (ب + ت)٢ + ٨(ب + ت) + ١٢

= ب٢ + ٢ب ت + ت٢ + ٨ب + ٨ت + ١٢ وهو الجواب

(٢٩) [(ب + ت) + ٥][(ب + ت) + ٧]

(٣٠) [(ك + ى) + ٥][(ك + ى) - ٤]

(٣١) [(م + ن) - ٦][(م + ن) - ٤]

(٣٢) [(م + ن) + ١١][(م + ن) + ٧]

اقسم بالذهن :

(٣٣) ك٢ + ٣ك + ٢ على ك + ١ (٣٤) ك٢ + ٥ك + ٦ على ك + ٢

(٣٥) ل٢ + ٦ل + ٥ على ل + ١ (٣٦) ب٢ + ٧ب + ١٢ على ب + ٣

(٣٧) ل٢ - ٧ل + ١٢ على ل - ٣ (٣٨) م٢ - ٥م + ٦ على م - ٢

(٣٩) ل٢ - ٧ل + ٦ على ل - ٦ (٤٠) م٢ - ٥م + ٤ على م - ١

(٤١) $ى^{٢} - ٧ى + ١٢$ على $ى - ٥$

جد المقسوم عليه الثنائي التام لكل من الكميات الآتية :

(٤٢) $م^{٢} + ٤م + ٣$ (٤٣) $ل^{٢} + ٥ل + ٦$

(٤٤) $ن^{٢} + ٧ن + ١٢$ (٤٥) $م^{٢} + ٦م + ٨$

(٤٦) $ل^{٢} + ٧ل + ١٠$ (٤٧) $ن^{٢} - ٤ن + ٣$

(٤٨) $م^{٢} - ٥م + ٦$ (٤٩) $ل^{٢} - ٦ل + ٨$

(٥٠) $ن^{٢} - ٨ن + ١٥$ (٥١) $م^{٢} - ٨م + ١٢$

(٥٢) $ل^{٢} - ٩ل + ١٤$ (٥٣) $ن^{٢} - ٩ن + ٨$

جد الكميتين الثنائيتين اذا كان حاصلها :

(٥٤) $ى^{٢} + ٨ى + ٧$ (٥٥) $ب^{٢} + ٩ب + ٨$

(٥٦) $د^{٢} - ١٠د + ٩$ (٥٧) $ى^{٢} - ١١ى + ١٠$

(٥٨) $ب^{٢} - ١٠ب + ١٦$ (٥٩) $د^{٢} + ٩د + ٢٠$

(٦٠) $ى^{٢} - ٩ى + ١٨$ (٦) $ب^{٢} + ٩ب + ١٤$

(٦٣) $د^{٢} + ٩د + ١٤$ (٦٤) $ى^{٢} - ١٢ى + ٣٢$

(٦٤) $ب^{٢} + ١١ب + ١٠$ (٦٥) $د^{٢} - ١١د + ٢٤$

تمرين للمراجعة

جد قيمة ما يأتي باخصر طريقة واسرع وقت :

(١) $(ل + ٥)^{٢}$ (٢) $(ل - ٥)^{٢}$ (٣) $(م - ٥ل)^{٢}$

(٤) $(٣م-٥)^{٢}$ (٥) $(٣ب+٤)^{٢}$ (٦) $(٣ب-٤)^{٢}$

(٧) $(م^{٢}-١)^{٢}$ (٨) $(م+٨)^{٢}$ (٩) $(٥ل+٦)^{٢}$

(١٠) $(٢ل^{٢}-١٠)^{٢}$ (١١) $(ك^{٤}-ى^{٥})^{٢}$ (١٢) $(ل^{٢}م^{٢}+٢ن)^{٢}$

(١٣) $(م+٥)(م-٥)$ (١٤) $(ل+٥)(ل-٣)$

(١٥) $(ل-٣م)(ل+٣م)$ (١٦) $(ل+٥ى)(ل-٣ى)$

(١٧) $(٣ن+٥)(٣ن-٥)$ (١٨) $(ى+٥)(ى+٧)$

(١٩) $(ع-٨)(ع+٣)$ (٢٠) $(٣ع+٤)(٣ع-٤)$

(٢١) $(٧ى+٥)(٧ى-٥)$ (٢٢) $(ص-٣)(ص-٦)$

(٢٣) $(ل-٤م)(ل+٣م)$ (٢٤) $(م^{٢}-٣)(م^{٢}-١)$

(٢٥) $(٣ن-٣)(٣ن+٣)$ (٢٦) $(ل-٥)(ل-٤)$

(٢٧) $(٥-٧ع)(٥+٧ع)$ (٢٨) $(٥+٣ى)(٥-٣ى)$

(٢٩) $(٣ن+٧)(٣ن-٧)$ (٣٠) $[(م+ن)-٣][(م+ن)+٣]$

(٣١) $[(م+ن)+٥][(م+ن)-٣]$

(٣٢) $[(م+ن)-٣]^{٢}$ (٣٣) $[(م+ن)+٥]^{٢}$

١٠٣. يتم بسط العبارات الجبرية بضرب الكميات المحصورة اذا وجدت ونزع الحواصر او رفعها واصلاح الحدود المتشابهة حتى يكون الجواب في ابسط شكل

مثالة: ابسط : $٥(ل-٣م)(ل+٣م)-٤(ل-٣م)^{٢}$

$= ٥(ل^{٢}-٩م^{٢})-٤(ل^{٢}-٦ل م+٩م^{٢})$

$= ٥ل^{٢}-٤٥م^{٢}-(٤ل^{٢}-٢٤ل م+٣٦م^{٢})$

$= ٥ل^{٢}-٤٥م^{٢}-٤ل^{٢}+٢٤ل م-٣٦م^{٢}$

$= ل^{٢} + ٢٤ ل م - ٨١ م^{٢}$

ولامتحانه نفرض ل = ٢ و م = ١ فلنا

$٥ (ل - ٣م)(ل + ٣م) - ٤ (ل - ٣م)^{٢}$

$= ٥ (٢ - ٣)(٢ + ٣) - ٤ (٢ - ٣)^{٢}$

$= - ٢٥ - ٤ = - ٢٩$

$ل^{٢} + ٢٤ ل م - ٨١ م^{٢} = ٤ + ٤٨ - ٨١ = - ٢٩$

تمرين

ابسط وامتحن :

(١) $٤٥ + ٤ (١ + ٣)$ (٢) $(١٥ + ٢٥)(٧ + ٥)$

(٣) $١٠٤ - ٥ (١٢ + ٧)$ (٤) $(٩٤ - ٤)(٦ + ٤)$

(٥) $١٥ - ٤ (ب + ٣)$ (٦) $(ب - ٥)(١٦ - ٩)$

(٧) $٣٥ - ٥ (ك + ٦)$ (٨) $٣ ك - ٢ (ك + ٣)$

(٩) $(ل + ٣)(ل - ١)$ (١٠) $(٥ ب + ٤)(٣ ب - ٧)$

(١١) $١٢ م + ٥ (٤ م - ٥)$ (١٢) $٧ ب - ٣ (٢ ب + ٩)$

(١٣) $١٩ ك - ٥ (٣ ك + ٤)$ (١٤) $٢٦ ن + ٤ (٤ ن - ١٣)$

(١٥) $(م + ٣)^{٢} + (م - ٣)^{٢}$ (١٦) $(م + ٣)^{٢} - (م - ٣)^{٢}$

(١٧) $(ل + ٣م)^{٢} + (ل - ٣م)^{٢}$ (١٨) $(ل + ٣م)^{٢} - (ل - ٣م)^{٢}$

(١٩) $(٣ل - ٢)^{٢} + (٣ل + ٢)^{٢}$

(٢٠) $(٣ل - ٢)^{٢} - (٣ل + ٢)^{٢}$

(٣١) $٣(ب+ت)^{٢} - ٢(ب-ت)^{٢}$

(٣٢) $٥(ك+٢ى)^{٢}+٣(ك-٢ى)^{٢}$

(٣٣) $٧(ب+ت)^{٢} - ٥(ب-ت)^{٢}$

(٣٤) $٧(٣ل-٢م)^{٢}-٥(٣ل+٢م)^{٢}$

(٣٥) $(ل+٤)^{٢} - (ل+٣)(ل-٣)$

(٣٦) $(ك+٩)(ك-٤) - (ك-٥)^{٢}$

(٣٧) $(٥ب-٣ت+٣)^{٢}-(٥ب+٣ت-٣)^{٢}$

(٣٨) $(ل-م-ن)^{٢}-ل(ل-٢م+٢ن)$

(٣٩) $٢م^{٢}-٣(م-١)^{٢} + (م-٣)^{٢}$

(٤٠) $٣ل^{٢}-ل(١-ل)(٣+ل)+ل^{٢}$

(٤١) $٥-٤(م-٣)^{٢}-٣(٣-٣م)(١+م)$

(٤٢) $ل^{٢}-[م(ل-م)-ل(م-ل)]-م^{٢}$

(٤٣) $(م-١)(م-٣)-(م-٣)(م-٣)+(م-٣)(م-٤)$

تمرين خطي

اجب ما استطعت شناها

(١) ما زيادة ٣٠ عن ل ؟

(٢) اشترى يوسف ذ ذراع صوف شعر الذراع $٣\frac{١}{٢}$ ليرات وم متر حرير سعر المتر ٤ ليرات فكم ليرة دفع ؟

(٣) عمر سليم س سنة فكم كان عمرهُ منذ ل سنة ؟ كم يكون عمرهُ بعد م سنة ؟

(٤) سارت سيارة س ساعة بسرعة م ميلاً في الساعة فكم المسافة التي قطعتها؟ كم بردًا ؟

(٥) كم شلينًا في ل ليرة ؟ كم بنسًا ؟

(٦) كم سنتيمًا في ٧ فرنكات ؟ في ف فرنكات ؟

(٧) اشترى علي خ خروفًا بـ غ غرشًا فكم ثمن الخروف ؟

(٨) اذا وفّر خادم غ غرشًا في الاسبوع ففي كم اسبوع يوفّر ٢٥ ليرة ؟

(٩) كم ساعة في ٢٤٠ دقيقة ؟ في د دقيقة ؟

(١٠) اذا قسمت ب الى قسمين احدهما ل فكم هو الآخر ؟

(١١) اذا وزّعت غ غرشًا على ف فقيرًا بالتساوي فكم يصيب الفقير الواحد؟

(١٢) مجموع عددين م واحدهما ل فما هو الآخر ؟

(١٣) فضلة عددين ف واكبر العددين ك فما الآخر ؟

(١٤) محيط دولاب عربة ق قدمًا فكم دورة يدور اذا سار مسافة ى بردًا ؟

(١٥) اذا كان يلزم الطالب ٢٠٠ قدم مكعبة من الهواء فاستخرج الدستور لعدد الطلبة "ع" الذين يمكن وضعهم في غرفة طولها ط قدمًا وعرضها ل وعلوها م

(١٦) جد بواسطة الدستور ع في العمل السابق عدد الطلبة الذين يمكن وضعهم في غرفة طولها ٥٠ قدمًا وعرضها ٢٦ وعلوها ٢٠

(١٧) جد بواسطة الدستور ع كم يجب ان يكون علو الغرفة التي تسع ١٢٠ طالبًا اذا كان طولها ٥٠ قدمًا وعرضها ٢٠

(١٨) ما العدد الذي يتركب من ٣ ارقام م مئة وع عشرة وح واحدًا ؟

(١٩) سار يوسف وسليم بسيارتيهما من ذات المكان في جهتين مختلفتين وفي

ذات الدقيقة وكان يوسف يقطع م ميلاً في الساعة وسليم ل ميلاً ففي كم من الوقت تصبح المسافة بينهما ك ميلاً ؟

(٣٠) اذا سار يوسف وسليم في ذات الجهة ففي كم من الوقت تصبح المسافة بينهما ى ميلاً ؟

القسم الثاني

١٠٤. اختصارات في الضرب

(١) اضرب باخصر طريقة م + ل + ن في م - ل - ن

$$(م+ل+ن)(م-ل-ن) = [م+(ل+ن)][م-(ل+ن)]$$
$$= م^{٢} - (ل+ن)^{٢}$$
$$= م^{٢} - ل^{٢} - ٢ل ن - ن^{٢}$$ وهو الجواب

(٢) $(ب+ت-س)(ب-ت+س)$

$$= [ب+(ت-س)][ب-(ت-س)]$$
$$= ب^{٢} - (ت-س)^{٢}$$
$$= ب^{٢} - ت^{٢} + ٢ت س - س^{٢}$$ وهو الجواب

(٣) ربّع (ل + م - ن) بالضرب وانظر اذا كان الجواب ينطبق على :

$$ل^{٢} + م^{٢} + ن^{٢} + ٢ل م - ٢ل ن - ٢م ن$$

اي ان مربع كمية كثيرة الحدود يساوي مجتمع مربع كل حدٍ من حدودها مع مضاعف الحاصل الجبري للحد الواحد في كل حدٍ من الحدود التي تليه في الكمية

تمرين خطي

اجب سريعاً على ما يأتي :

(١) $(ب+ت+٣)^{٢}$ (٢) $(ب+ت-٣)^{٢}$

(٣) $(ب+ت+س)^{٢}$ (٤) $(٢ل-م+٣ن)^{٢}$

(٥) $(٥+ب+ت)^{٢}$ (٦) $(٥ل-م-ن)^{٢}$

(٧) $(٢ب^{٢}-ت+٢س)^{٢}$ (٨) $(م+ن-ب-ت)^{٢}$

(٩) $(ب-ت+س-د)^{٢}$ (١٠) $(ك+ى-ب+١)^{٢}$

(١١) $(ل-م+ن+ى)^{٢}$ (١٢) $(٤ك+ى-٣)^{٢}$

(١٣) $[(ب+ت)+٣][(ب+ت)+٥]$

(١٤) $[(ب+ت)-٣][(ب+ت)+٥]$

(١٥) $(ب+ت-٣)(ب+ت+٥)$

(١٦) $(٢ب+ت-٥)(٢ب+ت+٣)$

(١٧) $(٢ل+م-٣ن)(٢ل-م+٣ن)$

(١٨) $(٣ل+٢م+٣ن)(٣ل+٢م-٥ن)$

(١٩) $(ب+ت+٥)(ب+ت-٥)$ (٢٠) $(ل+م+ن)(ل+م-ن)$

(٢١) $(٢ك-١+ى)$ $(٢ك-١-ى)$

(٢٢) $(٤+ك+ى)$ $(٤-ك-ى)$

(٢٣) $(٢ك+٣ى-٥)$ $(٢ك-٣ى+٥)$

(٢٤) $(٨+م+ن)$ $(٨-م-ن)$

(٢٥) $(ل^{٢}+٣ل+٣)(ل^{٢}+٣ل-٣)$

(٢٦) $(ل+م+٣ن)(ل+م-٣ن)$

(٣٧) (ب + ت – ٥ ل)(ب – ت + ٥ ل)

(٣٨) (م + ن + ١٠ ى)(م + ن – ١٠ ى)

(٣٩) (ل – ٢ م – ٥ ن)^{٢} (٤٠) (ب – ت – م – ن)^{٢}

(٤١) (١٠ – ٤ ب – ٣ ل)(١٠ + ٤ ب + ٣ ل)

(٤٢) (ب – ٢ ت + ٥ س)(ب + ٢ ت – ٥ س)

ابسط :

(٤٣) (ب – ت – س)^{٢} – ب(ب – ٢ ت + ٢ س)

(٤٤) ٣(ل – م)^{٢} – ٢[(ل + م)^{٢} – (ل – م)(ل + م)] + ٢ ل^{٢}

(٤٥) (٢ ل – ٧ م)(٢ ل + ٧ م) – ٤(ل – ٢ م)^{٢} + ١٢ م(٥ م – ل)

(٤٦) (ب – س + ١)(ب + س – ١) – (ب – ١)^{٢} + ٢(س – ١)^{٢}

١٠٥. جد بالضرب قيمة (١) (ب + ت)^{٢} و(٢) (ب – ت)^{٢}

وقابل ما تجدهُ مع ما يأتي :

(ب + ت)^{٢} = ب^{٢} + ٢ ب ت + ت^{٢}

(ب – ت)^{٢} = ب^{٢} – ٢ ب ت + ت^{٢}

انتبه لهذين الدستورين وقس عليهما ما يأتي :

(١) (ك + ى)^{٢} (٢) (ك – ى)^{٢} (٣) (ك + ١)^{٢}

(٤) (ك – ١)^{٢} (٥) (ك + ٢)^{٢} (٦) (ك – ٢)^{٢}

(٧) (ك – ٣)^{٢} (٨) (ك + ٣)^{٢} (٩) (٢ ل + م)^{٢}

(١٠) (ل – ٢ م)^{٢} (١١) (٢ م – ١)^{٢} (١٢) (٣ م + ٢)^{٢}

(١٣) (٣ م – ٢ ل)^{٢} (١٤) (٤ ل + ٣ م)^{٢} (١٥) (٥ ل – ٢ م)^{٢}

(١٦) (٣ م – ٤ ل)^{٢}

الفصل السابع

المعادلات البسيطة

القسم الاول

١٠٦. حدّ المعادلة. يقال للعبارة الجبرية التي تسبق علامة المساواة الجانب الايمن او الحدّ الاول والتي تلي العلامة الجانب الايسر او الحدّ الثاني. والاثنان معًا جانبا المعادلة او حدّاها

ففي المعادلة ٥ ك − ١ = ٢ ك + ٧ ٥ ك − ١ الجانب الايمن و ٢ ك + ٧ الجانب الايسر وحدّا المعادلة مثل كفتي الميزان متوازنتان ويجب ان تظلاّ كذلك

١٠٧. المقابلة هي نقل حدّ من جانب المعادلة الى الجانب الآخر مع تغيير علامته

مثالة: حل المعادلة. ك − ٢ = ٩

طريقة الحلّ بدون النقل

ك − ٢ = ٩

٢ = ٢

ك = ٩ + ٢ = ١١ (جمعنا ٢ الى كل من الجانبين المتساويين)

طريقة الحلّ بالنقل (المقابلة)

ك - ٢ = ٩

ك = ٩ + ٢ = ١٢ وذلك بنقل ٢ من الجانب الايمن الى الايسر وتغيير علامتها

تمرين شفهي

حلّ ما يأتي :

(١) ك - ١ = ٣ (٢) ك - ٣ = ٢ (٣) ك - ٢ = ٥

(٤) ك - ٤ = ٥ (٥) ى - ٧ = ٤ (٦) ك - ١١ = - ٣

(٧) ك + ١ = ٥ (٨) ك + ٣ = ٥ (٩) ك + ١١ = ٥

(١٠) ك + ب = ١٠ (١١) ك + ب = ت (١٢) ك - ب = ت

(١٣) ك + ٦ = ١٣ (١٤) ك - ٤ = ١٢ (١٥) ٢ى - ٤ = ٦

(١٦) ٣ى - ٢ = ١٠ (١٧) ٢ك + ٤ = ١٦ (١٨) ٥ك - ٢ = ١٨

(١٩) ٢ك - ٣ = - ١٣ (٢٠) ٣ك + ٢ = - ١٣

(٢١) ٥ك - ٦ = ١٩ (٢٢) ٩ك - ١٢ = ٦

(٢٣) ٤ك = ١٢ + ك (٢٤) ٦ك = ٢٠ + ٢ك

(٢٥) ك + م = ٥م (٢٦) ٣ك = ٨ - ك

(٢٧) ٤ك = ١٨ - ٢ك (٢٨) ٤ك = ١٦ + ٢ك

(٢٩) ٥ك = ١٨ - ٤ك (٣٠) ٦ك = ٢٥ + ك

(٣١) ٣ى + ٣ب = ٩ب (٣٢) ٢ك - ٣ب = ٩ب

(٢٣) اذا كانت ك = ٢ فهل ك + ٥ = ٨ ؟

(٢٤) اذا كانت ك = ٣ فهل ٢ك - ١ = ٥ ؟

(٢٥) اذا كانت ك = - ٣ فهل ٣ك + ٧ = ٥ ؟

(٢٦) اذا كانت ك = ١ فهل ٧ك - ٣ = ٥ك - ٢ ؟

تمرين كتابي

حلّ بالمقابلة :

(١) ٨ك - ٣ = ٦ك + ٨ (٢) ٤ك - ٥ = ٣ك + ١٣

(٣) ٦ى - ٥ = ٩ى - ١٠ (٤) ١٣ك + ٥ = ١٢ك + ١١

(٥) ١٤ك - ١٠ = ١٢ك - ٦ (٦) ٣ك - ٧ = ٨ك - ١٩

(٧) ٦ + ٤ك - ١٥ = ١٥ - ك (٨) ٥ك + ٣ - ٣ك = ١٧ - ٤

(٩) ٥ك - ٣ + ٢١ = ١٨ + ٤ك

(١٠) ٣ك - ٦ = ٣٤ + ٨ك (١١) ٣ك - ١٤ - ٥ك + ٤ = ٠

(١٢) ٣ك + ٥ + ٨ك + ½ = ٠

(١٣) ١٢ - ٣ى + ١٩ = ١٥ - ٧ى + ٦

(١٤) ٤ى - ٦ + ٣ى = ٣ + ٣ى + ٧

(١٥) ٣ى + ٥ + ٢ + ٣ى = ١٠ى - ٨ - ٢

(١٦) ١٤ى - ٦ى = ٢٢ + ١٧ى - ١١ى

(١٧) ٧ى - ١٣ + ٨ = ى - ٢٧ - ٥ى

(١٨) ٧(٣ى - ٢) + ١١ = ٦٠

(١٩) ٤(٢ى – ٥) + ١٥ = ٣(ى + ١٠)

(٢٠) ى^{٢} – ى(ى + ٥) = ى + ١٢

(٢١) (ى – ٢)(ى – ٥) = (ى + ٣)(ى + ٢)

(٢٢) (ى + ٥)^{٢} – (ى + ٣)^{٢} = ٤٠

تمرين كتابي

اجب ما استطعت شفاهاً

(١) سيارة تقطع م ميلاً في الساعة ففي كم من الوقت تقطع ل ميلاً ؟

(٢) ما العدد الذي ينقص ١٠٠ عن ك ؟ ما العدد الذي ينقص ك عن ١٠٠ ؟

(٣) ما زيادة ب + ت عن ل ؟

(٤) لدى رجل ل ليرة وقبض غ غرشاً فاذا صرف ب غرشاً كم يبقى له ؟

(٥) ما فائدة ل ليرة على معدل م ٪ لمدة س سنة ؟

(٦) عبّر عما يأتي بالرموز الجبرية : اذا قسمت ل على م كان الخارج ت والباقي ب

(٧) ضع بشكل معادلة : ٣ اضعاف ل تزيد ١٥ عن ٧٥

(٨) اذا كان طول المستطيل ط + ٢٥ متراً وعرضه ع – ١٢ فما محيطه ومساحته ؟

(٩) اقسم ٣٤٦ الى ٣ اقسام لكي يكون الاول ضعفي الثاني . والثاني ضعفي الثالث

(١٠) وزن الليرة الذهبية ٨ر٢٥ قمحة وهي تتركب من ٩ اجزاء ذهباً والباقي نحاساً فما وزن الذهب والنحاس فيها ؟

(١١) الفرق بين مربعي عددين متتابعين ١٠١ فما العددان ؟

(١٢) عدد يزيد عن آخر ١٥ ومجموعهما ٥ اضعاف فرقهما فما العددان ؟

(١٣) يلزم لصهر ٨ شاحنات من معدن الحديد ٧ شاحنات فحم حجري وشاحنة من الحجارة الكلسية فكم شاحنة يلزم من كل نوع اذا وضعنا في الاتون ٨٠٠ شاحنة من الانواع الثلاثة معاً ؟

(١٤) اذا انقصت عدداً ٢٥ وضربت الباقي في ٣ كان الحاصل ١٠٥ فما هو العدد ؟

(١٥) الفرق بين عددين ٣ والفرق بين مربعيهما ١٢٩ فما العددان ؟

(١٦) محيط مستطيل ٢٥٢ ذراعاً وطوله يزيد عن عرضه ٦ اذرع فكم طوله وعرضه ؟

(١٧) تساوى مستطيل ومربع في المساحة وكان طول المستطيل اكثر من جانب المربع ٥ امتار وعرضه اقل ٤ فكم طول جانب المربع ؟

تنبيه : ارسم مستطيلاً ومربعاً ومثل جوانبها بالاعداد والرموز اللازمة ثم ابدأ بالعمل

(١٨) ربع اصغر عددين متتابعين يزيد عن خمس الاكبر ١ فما العددان ؟

(١٩) خمس اكبر عددين متتابعين يزيد ٣ عن سبع الاصغر فما العددان ؟

(٢٠) اذا زدنا جانب المربع ٦ اذرع والجانب المجاور له ذراعين تكوّن مستطيل مساحته تزيد ٢٥٢ ذراعاً مربعاً عن مساحة المربع فكم طول جانب المربع ؟

(٢١) المسافة بين نيويورك وشيكاغو ١٠٠٠ ميل فاذا خرج قطار من نيويورك قاصداً شيكاغو بسرعة ٥٥ ميلاً في الساعة وخرج آخر بذات الوقت من شيكاغو الى نيويورك بسرعة ٤٥ ميلاً ففي اي وقت يلتقيان

ملاحظة : اطلب من التلميذ ان يرسم رسماً يمثل المسافة بين المدينتين ويضع الرموز عليه

الاعداد التي نبحث فيها	الرموز
عدد الساعات التي تلزم لقطار نيويورك	ك
" " " " " شيكاغو	ك
عدد الاميال التي يقطعها قطار نيويورك	٥٥ ك
" " " " " شيكاغو	٤٥ ك
" " " " القطاران معاً	١٠٠٠

(٢٢) سيارتان تقطع احداهما ٣٠ ميلاً في الساعة والاخرى ٢٥ فبعد ان سارت الاولى مدة ساعتين تبعتها الثانية فكم ميلاً يجب ان تسير حتى تدرك الاولى ؟

(٢٣) مركبان بينهما ٢٤ ميلاً . والمتأخر منهما يجري ٢٤ ميلاً في الساعة والمتقدم ١٨ فكم ميلاً يجري المتقدم قبل ان يدركه المتأخر

(٢٤) بين اميل وفؤاد ٢٦٠ ميلاً فسافرا حتى التقيا وكانت سرعة فؤاد ٥٠ ميلاً في الساعة واميل ٤٠ فكم قطع كل واحد من المسافة قبل ان التقيا ؟

(٢٥) طول غرفة اكثر من عرضها بـ ٢ اذرع ولكن اذا زيد ٢ اذرع على طولها وأنقص ذراعان من عرضها لما تغيرت مساحتها فكم طولها وكم عرضها ؟

تمرين للمراجعة

(١) ابسط: ٥ ب − ٧ ك + ٣ ت − ١٠ ث − ١٤ ب + ١٢ ى − ٨ ك + ١٢ ب − ١١ ك + ت

(٢) ابسط: ٢ ث د − ب^{٢} ت + ٧ س د^{٢} − ١٢ ب ت + ١٧ ب د − س د + ٤ س^{٢} د

(٣) ابسط: ٦ ك^{٢} − ٣ ب ت + ٤ ك^{٢} − ى^{٢} − ٧ ب ت − س + ٧ ب − ٥ ك^{٢} + ١٠ ب ت − ٣ ى^{٢} − ٥ ت + ٤ س + ٨ ك^{٢}

(٤) اطرح: ٢ ك^{٢} − ٣ ك ى + ى^{٢} − ١ من ك^{٢} + ١٠ ك ى − ٩ − ٥ ى^{٢}

(٥) اطرح: ٣ ب^{٢} ك − ٧ ب ك^{٢} + ص − ٥ ب ك من − ب^{٢} ك + ١٢ ب ك^{٢} − ب ك − ١٥

(٦) ابسط: ٧ − { ٥ − (ب − ت − ٣) + ٤ − ٣ ب }

(٧) ابسط: (ب + ت) − (ب − ت) + ٤ ب − (ب + ٣ ت) + س

(٨) ابسط: ٣ (٢ ل + ٥ م)^{٢} − ٢ (٢ ل − ٥ م)^{٢}

(٩) حلّ: م^{٢} − ٢ م (م + ٣) = ٩ − م^{٢} − ٣ م

(١٠) ربح سليم ويوسف ٢٧٥٠٠ ليرة واقتسماها بحيث كانت حصة يوسف اكثر من ضعفي حصة سليم بـ ٢٠٠٠ ليرة فكم كانت حصة كل منهما ؟

(١١) اضرب ٣ ل^{٢} − ٢ ل + ٥ في ٢ ل − ٣

(١٢) اقسم ١٢ م^{٣} − ١٤ م^{٢} − ١٩ م + ١٥ على ٣ م − ٥

(١٣) جد قيمة س ق + ½ ج ق٢ اذا كانت س = ٢٠٠ و ق = ٨ و ج = ٤٢

(١٤) مساحة معسكر مستطيل الشكل ١٢ ميلاً مربعاً فاذا كان طوله ٤½ اميال فكم عرضه؟ (استخدم القانون م = ط × ع)

(١٥) ما العدد الذي تضيف اليه ٢٥٠٠ ليكون المجموع ٣ اضعافه؟

(١٦) كان محصول الحنطة في الولايات المتحدة كما يأتي:

السنة	مليون كيل	السنة	مليون كيل
١٨٧٥	٣٩٣	١٩٠٠	٥٢٢
١٨٨٠	٤٩٩	١٩٠٥	٦٩٣
١٨٨٥	٤٥٧	١٩١٠	٦٣٥
١٨٩٠	٣٩٩	١٩١٥	١٠٢٦
١٨٩٥	٤٦٧	١٩٢٠	٨٢٣

اجعل وحدة العمود الرأسي تمثل ٥٠ مليون كيل

(١٧) املأ المركز الفارغ في الجدول الآتي:

الموضوع	القاعدة	القانون الرمزي
مساحة المستطيل	مساحة المستطيل تساوي حاصل الطول في العرض	م = ط ع
حجم المجسّم		ح = ط ع ر
الفائدة البسيطة	الفائدة البسيطة تساوي ضرب الاصل في المعدل ثم في الاجل	
محيط الدائرة	محيط الدائرة يساوي حاصل ٢ ، ١٤١٦ في القطر	
المجسم المتحرك		م = س × د
مساحة المثلث	مساحة المثلث تساوي نصف حاصل القاعدة في الارتفاع	
الضرب		ح = م م
القسمة	المقسوم يساوي حاصل ضرب الخارج في المقسوم عليه مع الباقي	
حجم الكرة		ح = ٤/٣ × ٢ ، ١٤١٦ × (ق/٢)^٣

(١٨) ضع ما يأتي بشكل معادلة وحلّها : ثلاثة اضعاف ك تزيد ٨ عن ٦١

القسم الثاني

١٠٨ . المتطابقات والمعادلات . لو اخذنا العبارة (ى + ٢) (ى – ٢) = ى^{٢} – ٤ وعوضنا عن ى بـ ١ او ٢ او ٣ او ٤ .... الخ لوجدنا الجانبين متساويين دائمًا وابدًا فهذه العبارة او المساواة يقال لها معادلة ذاتية او عينية او "متطابقة"

١٠٩ . المتطابقة هي معادلة يصح فيها تساوي الطرفين مهما فرضت قيمة حروفها . اي ان الطرفين متساويان تحت كل الظروف

١١٠ . المعادلة الشرطية . لو اخذنا العبارة ٣ك + ١ = ١٣ وعوضنا عن ك بـ ٤ كان الجانبان متساويين اي ٣ × ٤ + ١ او ١٣ = ١٣ ولكن لو عوضنا عن ك باي عدد آخر (ما عدا ٤) انتزعت المساواة واختلفت المعادلة والتوازن . وبكلام آخر انه يشترط لصحة المعادلة ان تكون قيمة ك اربعة (٤) فقط

فالمعادلة الشرطية وعليها في الغالب يطلق "لفظة معادلة" هي مساواة لا يصح فيها تساوي الطرفين الاّ بتعيين قيمة خصوصية او اكثر للكمية المجهولة

١١١ . علامة المساواة . يدل على تساوي الجانبين في المعادلة بالعلامة "=" والشائع الآن في الرياضيات العالية ان نستخدم "≡" في المتطابقة

تمرين

اجب ما استطعت شفاهًا

(١) هل يتساوى جانبا العبارة (م – ٣) (م + ٣) = م^{٢} – ٩ اذا عوضنا عن م بـ: ١، ٢، ٥، ١٠، فما نوع العبارة اذًا؟

(٢) هل يتساوى جانبا العبارة (م − ١)(م + ٣) = م٢ + ٢م − ٣ اذا عوضنا عن م بـ: ١، ٢، ٥، ١٠، فما قيمة م اذا ؟

(٣) ما قيمة ك التي تجعل جانبي (ك − ٥)٢ = ك٢ − ١٠ك + ٢٥ متساويين ؟

(٤) ما قيمة ك في (ك − ٤)٢ = ك٢ ؟

بيّن في ما يأتي ايها متطابقة وايها معادلة :

(٥) (م + ٢)(م − ٣) = م٢ − م − ٦

(٦) (م + ٣)(م − ٤) = م٢ − م − ١٢

(٧) (م + ٤)٢ = م٢ + ٨م + ١٦ (٨) ٤م + ٣ = م + ١١

(٩) ك٢ − ١٦ = (ك + ٤)(ك − ٤) (١٠) ٥م − ٣ = ١١ + ٢م

(١١) (ك + ٦)(ك − ٦) = ك٢ − ٣٦ (١٢) ٤م − ٥ = ٦م + ١

برهن ان :

(١٣) فضلة مربع عددين متتابعين يساوي مجموع العددين

(١٤) مجموع ٣ اعداد متتابعة تساوي ٣ اضعاف العدد المتوسط

(١٥) كم مرة تتكرر ب في م ؟

(١٦) ماذا تضيف الى ب ليكون المجموع ك ؟

(١٧) كم طول جانب المربع اذا كان محيطه م مترًا ؟

(١٨) عمر يوسف س سنة وعمر ابنته الس اكثر من ثلث عمره بسنتين فكم عمر الس ؟ كم كان عمرها منذ ١٠ سنوات ؟ كم يكون عمرها بعد مضي ١٠ سنوات ؟

(١٩) مدخول رجل ل ليرة في الشهر ومصروفه م فكم المقدار الذي يوفّره في ٥ سنوات ؟

(٣٠) لدى انيس ك كلة وامهل ل كلة فاذا تشاركا واقتسما كلها بالسوية فكم تكون حصة الواحد منهما ؟

(٣١) بماذا تمثل العدد الزوجي ؟ العدد الفردي ؟

(٣٢) رجل يتم عملاً في ى يوماً فما المقدار الذي يتممهُ في ب يوماً ؟

(٣٣) سار بهيج ٧ ساعات ثم تبعهُ جورج على دراجتهِ وادركهُ بعد ل ساعة فكم ساعة سار بهيج ؟

(٣٤) سافر بهيج وعارف من ذات المكان وفي نفس الوقت الى جهتين مختلفتين وكان معدل سير بهيج ب ميلاً في الساعة وعارف ع ميلاً فاذا سارا س ساعة فكم تكون المسافة بينهما ؟

١١١. الحركة المنتظمة. اذا سارت سيارة ١٠ ساعات بمعدل ٤٠ ميلاً في الساعة فانها تقطع مسافة ١٠ × ٤٠ او ٤٠٠ ميل . وهذا يمثل الحركة المنتظمة التي تشمل :

١ً الوقت الذي يقاس بالثواني او الدقائق او الساعات ... الخ

٢ً معدل السير او السرعة او المسافة التي تقطع في وحدة من وحدات الوقت كالثانية او الدقيقة او الساعة او اليوم

٣ً . المسافة (جميعها) التي تقاس بوحدة من وحدات الطول كالنبراط والذراع والمتر والكيلو متر والميل

فالوقت (ق) والمعدل (ع) والمسافة (م) ترتبط بعضها في بعض بالقانون :

م = ع ق

وعلى هذا القانون يرتكز عدد كبير من الاسئلة في الجبر والطبيعيات مثال (١) :

ترك ساعي المدينة بسرعة ٤ اميال في الساعة وسار ١٦ ساعة قبل ان ادركهُ فارس جرى وراءهُ بعد تركهِ المدينة بـ ١٠ ساعات فكم كانت سرعة الفارس ؟

	ق = الوقت ساعات	ع = المعدل اميال في الساعة	المسافة م = ع ق
الساعي	١٦	٤	٦٤ = ٤ × ١٦
الفارس	٦ = (١٦ − ١٠)	ك	٦ ك

فاذًا ٦ ك = ٦٤

ك = ١٠ ٢/٣

الامتحان : ٤ × ١٦ = ٦٤ ؛ ١٠ ٢/٣ × ٦ = ٦٤

تمرين كتابي

سار امين وبدر من ذات المكان وفي ذات الوقت في جهتين مختلفتين :

(١) وكانت سرعة امين ٨ اميال في الساعة وبدر ١٠ ففي كم من الوقت تصبح المسافة بينهما ١٨٠ ميلاً ؟

(٢) وكانت سرعة امين مضاعف سرعة بدر والمسافة بينهما ١٢٥ ميلاً بعد ان سارا ٥ ساعات فكم سرعة كل منهما ؟

(٣) وكان امين اسرع من بدر بميلين في الساعة . وبعد مضي ٨ ساعات اصبحت المسافة بينهما ٩٦ ميلاً فكم سرعة كل منهما ؟

(٤) وكانت سيارة امين اسرع من سيارة بدر بـ ١٢ ميلاً في الساعة وبعد مضي ٥ ساعات اصبحت المسافة بينهما ٢٤٠ ميلاً فكم سرعة كل منهما ؟

(٥) وكان بدر ابطأ من امين بـ ٤ اميال في الساعة وسرعة تساوي ٦/٥ سرعة امين ففي كم من الوقت يكون الفرق بينهما ٢٨٨ ميلاً ؟

(٦) فسار امين ٥ ساعات ووقف وبدر ٦ ساعات ووقف واصبح الفرق بينهما ١٥٢ ميلاً فاذا كانت سرعة بدر ٤/٥ سرعة امين فكم سرعة كل منهما ؟

البعد بين احمد وسليم ٤٦٠ ميلاً فسارا في ذات الوقت الواحد نحو الآخر حتى التقيا فكم سرعة كل منهما :

(٧) اذا التقيا بعد ١٢ ساعة وكانت سرعتهما متساوية ؟

(٨) اذا التقيا بعد ٢ ساعات وكان احمد اسرع من سليم بـ ٤ اميال في الساعة ؟

(٩) اذا التقيا بعد ٨ ساعات وكانت سرعة احمد ضعفي سرعة سليم ؟

(١٠) اذا التقيا بعد ٦ ساعات وكان احمد اسرع من سليم بـ ١٠ اميال في الساعة ؟

(١١) اطلق جورج بندقيته على هدف يبعد ٥٥٠ يردًا عنه وبعد مضي ٢ ١/٢ ثانية سمع وقع الرصاصة عليه فكم معدل سرعة الرصاصة اذا كان الصوت يسير ١١٠٠ قدم في الثانية ؟

تمرين كتابي

(١) ما خمسة اعداد متتابعة مجموعها ينقص ٢ عن ٦ اضعاف اصغرها ؟

(٢) مجموع ثلاثة اعداد مفردة متتابعة ١٧١ فما هي ؟

(٣) مجموع عددين ٤٨ واذا طرح ٧ من مضاعف الاكبر كان الباقي ٣ اضعاف الاصغر إلاّ ٥ فما العددان ؟

(٤) مجموع عددين ١٢١ واذا زيد ٨ على ٤ اضعاف احدهما كان المجموع ٣ اضعاف الآخر فما العددان ؟

(٥) فضلة مربعي عددين متتابعين ٧٥ فما العددان ؟

(٦) فضلة مربعي عددين مفردين متتابعين ١٠٤ فما العددان ؟

(٧) مشى رجل ١٥ ميلاً وركب سيارة مسافة معلومة وسار في باخرة ضعفي كل ما قطعهُ قبلاً وبلغت رحلتهُ ١٨٠ ميلاً فكم المسافة التي قطعها في الباخرة ؟

(٨) اذا طرحت ١٥ من عدد معلوم ثم طرحت الباقي من ٢١٠ كانت النتيجة ٣ اضعاف العدد فما هو العدد ؟

(٩) طول ساحة ضعفا عرضها واذا زدت ٣٠ على الطول وانقصت ١٠ من العرض زادت المساحة ٣٠٠ متر مربع فكم طول الساحة وعرضها ؟

(١٠) طول ملعب التنس اكثر من ضعفي عرضهِ بـ ٦ اقدام ومحيطهُ ٢٢٨ قدماً فكم طولهُ وعرضهُ ؟

(١١) طول ملعب تنس اكثر من عرضهِ بـ ٤٣ قدماً فاذا زيد على موازاة عرضهِ ممران عرض كل منهما ١٥ قدماً وعلى موازاة طولهِ ممران عرض كل منهما ١٠ اقدام لزادت مساحتهُ ٤٢٤٠ قدماً مربعة فكم طولهُ وعرضهُ ؟

(١٢) محيط ملعب "كرة القدم" ١٢٠٠ قدم وطولهُ ينقص ٤٠ يردًا عن ضعفي عرضهِ فكم طولهُ وعرضهُ ؟

(١٣) طول ملعب "كرة القدم" اكثر من عرضهِ بـ ١٣٠ قدماً واذا

احطناه بمر عرضه ٣ قدماً زادت مساحته ٢٥٦٠٠ قدماً مربعة فكم طوله وعرضه ؟

(١٤) عمر احمد ٣ اضعاف عمر يوسف وبعد ٥ سنوات يصير عمرهُ ضعفي عمر يوسف فكم عمر كل منهما ؟

(١٥) امين اكبر من بطرس بـ ٢ سنة وبعد عشر سنوات يصير عمرهُ ضعفي عمر بطرس فكم عمر كل منهما ؟

(١٦) عمر امين ٤ اضعاف عمر فارس وبعد ٢٠ سنة يصبح عمرهُ ضعفي عمر فارس فكم عمر كل منهما ؟

(١٧) عمر حسن ٤٨ سنة وعزيز ١٨ فمنذ كم سنة كان عمرهُ ٤ اضعاف عمر عزيز ؟ بعد كم سنة يصبح عمرهُ ضعفي عمر عزيز ؟

(١٨) كم كيلو من ما سعرهُ ٤٠ غرشاً تخلط مع ١٢ كيلو ما سعرهُ ٢٠ غرشاً ليكون لك مزيج سعرهُ ٢٤ غرشاً ؟

(١٩) كم ليبرة شاي ما سعرهُ ٦٠ غرشاً تخلط مع ٢٥ ليبرة ما سعرهُ ٤٠ غرشاً ليكون لك مزيج سعرهُ ٤٥ غرشاً ؟

(٢٠) اطلق رجل بندقيته على هدف بعدهُ ١٠٠٠ متر فمرت الرصاصة فوق راس ولد الذي سمع صوت الطلق ووقع الرصاصة على الهدف بذات الوقت فاذا كان معدل سير الرصاصة ١٦٥٠ قدماً في الثانية فكم بعد الولد من الهدف ؟

الفصل الثامن

حلّ الاضلاع

القسم الاول

١١٢. مرّ بنا في علم الحساب ان ٥ و٣ اضلاع ١٥ لان ٥ × ٣ = ١٥ ومثلهُ في الجبر فاننا نقول "اضلاع" العبارة الجبرية في الكميات التي اذا ضربت بعضها في بعض تحصل العبارة

مثالهُ ك + ى و ك − ى يقال لها اضلاع ك٢ − ى٢ لان (ك + ى) (ك − ى) = ك٢ − ى٢ فاذًا ضلع الكمية هو عبارة تنقسم عليها الكمية بدون باقٍ.

وبما ان اضلاع ٣ ب٢ ل٢ س = ٣ × ب٢ × ل٢ × س = ٣ × ب × ب × ل × ل × ل × س فالحدّ (البسيط) ينفك الى اضلاع قدر عدد كمياتهِ او عدد قواها ويمكن ايجادها بمجرد النظر اليهِ

ولاجل تسهيل العمل نقسم البحث الى حالات

الحالة الاولى

١١٣. اذا وجد ضلع مشترك بين جميع حدود الكمية فاننا نجري كما في الامثلة الآتية:

مثال ١ جد اضلاع: ٥ ك٢ + ١٥ ك

$$\begin{array}{r|l} ٥ك^{٢}+١٥ك & (٥ك \\ \hline ك+٣ & ٥ك^{٢}+١٥ك=٥ك(ك+٣) \end{array}$$

مثال ٣ جد اضلاع: $٦ل^{٢}م^{٢}-٩ل^{٢}م^{٢}+٣م^{٢}$

$$\begin{array}{r|l} ٦ل^{٢}م^{٢}-٩ل^{٢}م^{٢}+٣م^{٢} & (٣م^{٢} \\ \hline ٢ل^{٢}-٣ل^{٢}م+١ & \end{array}$$

$$٦ل^{٢}م^{٢}-٩ل^{٢}م^{٢}+٣م^{٢}=٣م^{٢}(٢ل^{٢}-٣ل^{٢}م+١)$$

وبعد التمرين والمزاولة يمكن للطالب ان يقسم بذهنه بدلاً من الكتابة توفيراً للوقت. ولا بدّ له من امتحان القسمة بالضرب ليكون على ثقة من صحة العمل

فيتضح لنا من الامثلة المذكورة انه يجب قسمة كل حدّ على العامل الاكبر المشترك ويكون المنسوم عليه والخارج الاضلاع المطلوبة. وبكلام آخر نوخذ القوة المشتركة بين جميع الحدود ضلعاً وما يخرج من القسمة عليها ضلعاً آخر

تمرين

جد اضلاع الكميات الآتية:

(١) $٣ك+٦$ (٢) $٥ك+٥ى$ (٣) $ك^{٢}-ك^{٢}$

(٤) $٥ب+١٥ت$ (٥) $٨ك-٢ك^{٤}$ (٦) $بك+بى$

(٧) $لم+م^{٢}$ (٨) $س^{٣}-س^{٢}ل$ (٩) $١٥اب^{٢}-٥ب^{٦}$

(١٠) $٦ب-١٢ب^{٢}$ (١١) $١٨ل-١٥م$ (١٢) $٦-١٢ك$

(١٣) $ل^{٢}+لم$ (١٤) $١٢ب+٢٠ب^{٢}$ (١٥) $٣ك+٣ك^{٢}$

(١٦) $بل+تل$ (١٧) $٢١ل^{٢}م-١٨لم^{٢}$ (١٨) $بتس+بسل$

(١٩) ١٨ك^{٢} − ٥٤ك (٢٠) ٢٥ل^{٢}م^{٢}ن + ٣٠ل م^{٢}ن

(٢١) ٢ك^{٢} + ٥ك^{٢}ل م (٢٢) ٧ب + ٢١ب^{٢}

(٢٣) ك^{٢} − ك + ك^{٢} (٢٤) س^{٥} − س^{٣} + س^{٢}

(٢٥) س^{٢} + ٢ب س − س (٢٦) ٩ل^{٢} − ١٥ل + ٦ل^{٢}

(٢٧) ١٠ب ت − ١٤ب س − ٨ب^{٢}

(٢٨) ب ك + ب ى + ب ل (٢٩) ب ت^{٢} + ب س^{٢} − ب د^{٢}

(٣٠) ل^{٤} + ل^{٣} − ل^{٢} + ل (٣١) ل^{٢} − ل^{٣} − ل^{٤} + ل^{٥}

(٣٢) ٤٩ل^{٢}م^{٢}ن^{٢} − ٢٢ل^{٣}م^{٢}ن^{٤} + ٤٤ل^{٢}م^{٢}ن^{٥}

جد قيمة ما يأتي باخصر طريقة :

(٣٣) ٨٤٧ × ٩١٥ − ٨٤٧ × ٩١٣

(٣٤) ٥١٤٫٧٥ × ٨٩ − ٨٥ × ٥١٤٫٧٥

(٣٥) ن ق^{٢} + ن د^{٢} اذا كانت ن = ٢٢/٧ و ق = ٨ و د = ٦

(٣٦) ن ق^{٢} − ن د^{٢} اذا كانت ن = ٢٢/٧ و ق = ١٠٠ و د = ٦٠

الحالة الثانية

١١٤. اذا كانت العبارة الثلاثية مربعاً تاماً . قلنا سابقاً ان الكمية الثلاثية مربع تام وذلك اذا نظمت بحيث يكون حدّها الاول وحدّها الثالث مربعين تامين موجبين وحدّها الاوسط ضعفا حاصل جذر حدّها الاول المالي في جذر حدها الثالث

مثالة : ك^{٢} + ٨ك + ١٦ مربع تام لان الحد الاول والحد الثالث مربعان تامان

والاوسط ضعفا حاصل جذر الحد الاول المالي وجذر الحد الثالث المالي ولكن م٢ + ١٦م + ٨١ ليست مربعاً تاما . ما الخلل ؟

١١٥ . اضلاع الكمية الثلاثية التامة التربيع هاكميتان متساويتان كل منها مؤلفة من جذر الحد الاول المالي وجذر الحد الثالث المالي مربوطان بعلامة الحد الاوسط

مثال ١ . جد اضلاع : ب٢ + ٤ب ت + ٤ت٢ = (ب + ٢ت) (ب + ٢ت) او (ب + ٢ت)٢

مثال ٢ . جد اضلاع : ل٤ – ٦ل٢م + ٩ل٢م٢ = ل٢ (ل٢ – ٦ل م + ٩م٢) = ل٢ (ل – ٣م)٢

تمرين

املأ الفراغ بالحد اللازم لتكون الكمية مربعاً تاماً وجد اضلاعها :

(١) ل٢ + ( ) + ٤
(٢) ب٢ + ( ) + ٩
(٣) ل٢ + ( ) + ن٢
(٤) ٤ب٢ + ( ) + ١
(٥) ك٦ + ( ) + ٩
(٦) ١٦ى٢ + ( ) + ١
(٧) ٤ى٢ + ( ) + ٩ل٢
(٨) ٤ك٢ + ( ) + ٢٥
(٩) ى٢ – ٦ى + ( )
(١٠) ك٢ – ١٢ك + ( )
(١١) ٢٤ك٢ – ( ) + ١
(١٢) ب٢ + ٦ب ت + ( )
(١٣) ٤ى٢ – ٤٠ى + ( )
(١٤) ٩ى٢ – ٢٤ى + ( )

(١٥) ٢٥ب^{٢}−( )+٩ت^{٢} (١٦) ( )−٦ى^{٢}+٩

(١٧) ( )−١٠٠ى^{٤}+٢٥ (١٨) ( )+١٦ك^{٢}+٤

(١٩) ٨١ب^{٢}−( )+١٦ت^{٢} (٢٠) ١٠٠ل^{٢}−١٨٠ل+( )

(٢١) ( )−٨٠ل^{٢}م^{٢}+٦٤م^{٢} (٢٢) ٤٩د^{٢}−( )+٤م^{٤}

جد اضلاع ما يأتي ثم امتحن العمل :

(٢٣) س^{٢}+٢س د+د^{٢} (٢٤) ك^{٢}+٢كم+م^{٢}

(٢٥) ل^{٢}+٢ل+١ (٢٦) ب^{٢}+٦ب+٩

(٢٧) ل^{٢}−١٠ل+٢٥ (٢٨) م^{٢}+٨م+١٦

(٢٩) ٤ك^{٢}+٤ك+١ (٣٠) ٩−٦ك+ك^{٢}

(٣١) ٢٥ك^{٢}+١٠كى+ى^{٢} (٣٢) ١+٨ب+١٦ب^{٢}

(٣٣) ١٦ك^{٢}+١−٨ك (٣٤) ٤م^{٢}−١٢م+٩

(٣٥) ك^{٤}+١+٢ك^{٢} (٣٦) ك^{٦}−٦ك^{٣}+٩

(٣٧) ٩ب^{٢}−٣٠ب ل+٢٥ل^{٢} (٣٨) ك^{٢}−٢٠كى+١٠٠ى^{٢}

(٣٩) كى^{٢}+٢كى+ك (٤٠) ٢م^{٢}ن−٤م ن+٢ن

(٤١) ك^{١}+٢ك^{٥}ى+ى^{٢} (٤٢) ك^{٢}−٤ك^{٢}+٤ك

(٤٣) ١٠ب^{٢}−٢٠ب+١٠

الحالة الثالثة

١١٦. فضلة مربعين

بما ان حاصل (ب+ت)(ب−ت)=ب^{٢}−ت^{٢}

فاذًا $ب^٢ - ت^٢ = (ب + ت)(ب - ت)$

اي ان حاصل ضرب مجموع كميتين في فضلتهما يساوي فرق مربعيهما وبالعكس فان فضلة مربعي كميتين تساوي حاصل ضرب مجموعهما في فضلتهما. وعليه يمكننا ان نجد اضلاع فضلة مربعين لاول وهلة وذلك باستخراج الجذر المالي لكلٍّ من المربعين ثم ربطها بالعلامة "+" لمعرفة مجموعهما وبالعلامة "–" لمعرفة فضلتهما

مثال ١. جد اضلاع: $ل^٢ - ٣٦م^٤$

$ل^٢ - ٣٦م^٤ = (ل + ٦م^٢)(ل - ٦م^٢)$

مثال ٢. جد اضلاع: $ل^٤ - م^٤$

$ل^٤ - م^٤ = (ل^٢ + م^٢)(ل^٢ - م^٢) = (ل^٢ + م^٢)(ل + م)(ل - م)$

تمرين

جد اضلاع الكميات الآتية وامعن العمل

(١) $ك^٢ - ١$ (٢) $ك^٢ - ٤$ (٣) $ل^٢ - م^٢$

(٤) $٩ل^٢ - م^٢$ (٥) $١٦ - ى^٢$ (٦) $ب^٢ - ٢٥$

(٧) $ل^٢ - ٤٩$ (٨) $٦٤ - م^٢$ (٩) $١٢١ - ك^٢$

(١٠) $١ - ل^٢$ (١١) $٤ل^٢ - ٩$ (١٢) $ل^٤ - ٨١$

(١٣) $١٦ك^٤ - ٢٥$ (١٤) $٩ل^٢م^٢ - ٣٦ن^٢$

(١٥) $٢٥ - ١٦ل^٢$ (١٦) $٤م^٢ - ٨١ل^٢ن^٢$

(١٧) $١٤٤ - ١٠٠م^٤$ (١٨) $١٦ب^٤ - ت^٤$

(١٩) ٤م^{٦} − ب^{٨} (٢٠) ١٦ك^{٤} − ى^{٤}

(٢١) ك^{٤} − ١ (٢٢) ٦٤ب^{٤} − ى^{٤} (٢٣) ل^{٨} − م^{٨}

(٢٤) ك^{٨} − ١ (٢٥) ٤٦س^{٨} − ٤٩د^{٨} (٢٦) ب^{٢}ت^{٤} − ١٢١

(٢٧) ١٠٠ − ل^{٨} (٢٨) ١ − ١٦ك^{٤} (٢٩) ك^{٤} − ٩ب^{٢}ك^{٢}

(٣٠) ٢٤٢ − ٢ل^{٤} (٣١) ٣ك^{٢} − ٧٥ك ل^{٦} (٣٢) ب ك^{٦} − ب ك^{٢}

(٣٣) ب^{٨}ك − ك (٣٤) ٢٢٥ل^{٢} − م^{٢}

جد قيمة ما يأتي :

(٣٥) ١٤٨^{٢} − ٦٣^{٢} (٣٦) ٥١٢^{٢} − ٤٨٨^{٢} (٣٧) ٢١٤^{٢} − ١٨٦

الحالة الرابعة

١١٧. الكميات التي من نوع ك^{٢} + ب ك + س

مرّ معنا أنّ : (ل + ٣)(ل + ٥) = ل^{٢} + ٨ل + ١٥ ..... (١)

(ل − ٣)(ل − ٥) = ل^{٢} − ٨ل + ١٥ ..... (٢)

(ل + ٣)(ل − ٥) = ل^{٢} − ٢ل − ١٥ ..... (٣)

(ل − ٣)(ل + ٥) = ل^{٢} + ٢ل − ١٥ ..... (٤)

اذا دققنا النظر في الامثلة المارّ ذكرها فاننا نجد أنّ :

(١) حاصل كميتين ثنائيتين في الغالب كمية ثلاثية

(٢) الحدّ الاول في كل من المضروبين ل

(٣) حاصل ضرب الحدّ الثاني من المضروب فيه في الحدّ الثاني من المضروب هو الحدّ الثالث في الحاصل او الكمية الثلاثية اي ٣ × ٥ = ١٥ (بقطع النظر عن العلامة)

(٤) نتيجة الجمع الجبري للحدين الثانيين في المضروبين هو مسمى ل في الحاصل فمثلاً في (٣) نتيجة جمع +٣ و– ٥ = –٢ وهو مسمى ل في الكمية الثلاثية

والآن سنستعمل هذه الاستنتاجات في تحليل الكميات الثلاثة فنقول ان لكل كمية ثلاثة ضلعين في الغالب ثنائيين ومتى كانت علامة الحدّ الثالث ايجابية كانت علامتا الضلعين متفقتين وهما نفس علامة الحدّ الثاني. اما كيفية حلّ الكمية الثلاثية فاننا نبسطها بالامثلة الآتية:

مثال ١. جد اضلاع ل٢ + ١٢ ل + ٣٥

١. ضع اربعة اقواس متقابلة ( )( )

٢. ضع في كل منها الجذر المالي للحد الاول مع العلامة التي تليه (ل +)(ل +)

٣. جد ضلعين للحد الثالث ٣٥ مجموعهما ١٢ وضعها بعد العلامة. وهما ٥ و٧ (ل+٥)(ل+٧)

٤. امتحن بالضرب (ل+٥)(ل+٧) = ل٢ + ١٢ ل + ٣٥

مثال ٢. جد اضلاع ل٢ – ١٢ ل + ٣٥

بما ان الحد الثالث ايجابي فعلامتا الضلعين متفقتان وبما ان الحدّ الثاني سلبي بالعلامتان كذلك اي سلبيتان. فعلينا اذاً ان نجد عددين حاصلهما ٣٥ ومجموعهما ٥ و٧

فالاضلاع اذاً (ل–٥)(ل–٧)

مثال ٣. جد اضلاع ل٢ + ٢ ل – ٣٥

بما ان الحد الثالث سلبي فالعلامتان مختلفتان وعليه يكون احد الحدين الثانيين في المضروبين ايجابياً والآخر سلبياً. وبما ان الحد الثاني (٢ ل) ايجابي فاكبرها

ايجابي. والآن علينا ان نجد عددين حاصلها −٣٥ ومجموعها الجبري +٢ وهما −٥ و+٧

فالاضلاع اذًا (ل −٥)(ل +٧)

مثال ٤. جد اضلاع ل٢ − ٢ل − ٣٥

جد عددين حاصلها −٣٥ ومجموعها الجبري −٢ فهما −٧ و+٥ وعليه فالاضلاع هي (ل −٧)(ل +٥)

فتأمل هذه الامور مليًا واحفظها جيدًا وقس عليها

تمرين

املأ الفراغ بالاضلاع وامتحن :

(١) ل٢ +٥ل +٦ = (ل +)(ل +)

(٢) ل٢ − ١١ل +٢٤ = (ل −)(ل −)

(٣) ل٢ +٤ل − ٣٢ = (ل +) (ل −)

(٤) ل٢ − ٧ل − ١٨ = (ل +)(ل −)

(٥) ل٢ +٣ل − ٢٨ = (ل +)(ل −)

(٦) ل٢ − ٥ل − ٦ = (ل +)(ل −)

جد اضلاع ما يأتي وامتحن العمل :

(٧) ل٢ +٣ل +٢ (٨) م٢ +٤م +٣

(٩) ك٢ +٥ك +٦ (١٠) ل٢ +٦ل +٥

(١١) $م^{٢}+٧م+١٢$ (١٢) $ك^{٢}+١٠ك+١٦$

(١٣) $ل^{٢}+١٢ل+٢٧$ (١٤) $م^{٢}+١٤م+٤٠$

(١٥) $ك^{٢}+١٤ك+٤٣$ (١٦) $ل^{٢}-٧ل+١٠$

(١٧) $م^{٢}-١٠م+٢١$ (١٨) $ك^{٢}-٩ك+٢٠$

(١٩) $ل^{٢}-١٢ل+٣٥$ (٢٠) $م^{٢}-٩م+١٨$

(٢١) $ك^{٢}-٩ك+١٤$ (٢٢) $ل^{٢}-٧ل+١٢$

(٢٣) $م^{٢}-١٢م+٢٣$ (٢٤) $ك^{٢}-١٠ك+٩$

(٢٥) $ل^{٢}+٤ل-١٢$ (٢٦) $م^{٢}+٣م-١٥$

(٢٧) $ك^{٢}+٥ك-١٤$ (٢٨) $ل^{٢}-٣ل-١٨$

(٢٩) $م^{٢}-٣م-٢٨$ (٣٠) $ك^{٢}-٤ك-٤٥$

(٣١) $ل^{٢}-ل-٤٢$ (٣٢) $م^{٢}+٦م-٢٧$

(٣٣) $ك^{٢}-٥ك-٥٠$ (٣٤) $ل^{٢}+٩ل-٣٦$

(٣٥) $م^{٢}-٦م-٥٥$ (٣٦) $ك^{٢}+٧ك-١٨$

(٣٧) $ل^{٢}-٥ل م-٢٤م^{٢}$ (٣٨) $ل^{٢}+٦ل م-٤٠م^{٢}$

(٣٩) $ك^{٤}+٤ك^{٢}-٧٧$ (٤٠) $ل^{٢}-ل م-٩٠م^{٢}$

(٤١) $ل^{٤}-٢ل^{٢}م-٣٦م^{٢}$ (٤٢) $ك^{٤}-ك^{٢}ى-٣٠ى^{٢}$

(٤٣) $ل^{٦}+ل^{٣}-٥٦$ (٤٤) $م^{٦}+١٢م^{٣}-١٣$

(٤٥) $ك^{٤}+٣ك^{٢}-٤٠$

تمرين — (أسئلة متنوعة)

جد اضلاع ما يأتي وامتحن العمل

(١) ٥ب+٥ت (٢) ل^{٢}−٨ل +١٥ (٣) م^{٢}−٢م−٨

(٤) ب^{٢}−٢٥ (٥) ٩−٤ل^{٢} (٦) م^{٢}−٥م+٦

(٧) ى^{٢}+٢ى−٨٠ (٨) ل^{٢}−٦ل م+٩م^{٢}

(٩) ل^{٢}+٤ل م+٤م^{٢} (١٠) ٢ل^{٢}م−٦ل م^{٢}

(١١) ٧ك−١٤ل+٢١س (١٢) ك^{٤}+٢ك^{٢}−٢٨

(١٣) ل^{٢}+١٠ل+٢٥ (١٤) ك^{٢}−٦ك+٥

(١٥) ل^{٢}−١٦ل+٦٤ (١٦) ل^{٢}−ل م−١٢م^{٢}

(١٧) ٦٤−ك^{٤} (١٨) م^{٢}−٤م+٣

(١٩) ى^{٣}−ى^{٢}−٦ى (٢٠) ك^{٣}−١٦ك

(٢١) ك^{٣}+٨ك^{٢}+١٦ك (٢٢) ب^{٤}−٩ك^{٢}ى^{٢}

(٢٣) ب^{٤}−٤ب^{٢}ك+٤ب^{٢}ك^{٢}

(٢٤) م^{٨}−١ (٢٥) ك^{٣}+٥ل ك^{٢}+٦ك ل^{٢}

(٢٦) م−م^{٥} (٢٧) ل^{٤}−٧ل^{٢}+١٢

(٢٨) ٦ك^{٣}−٦ك (٢٩) ل^{٣}−١٦ل م^{٢}

(٣٠) ل م^{٢}+٢ل م+ل^{٢} (٣١) ك^{٤}+٣ك^{٢}−٢٨

(٣٢) ل^{٤}−٢ل^{٣}−٤٨ل^{٢} (٣٣) ك^{٣}−٨ك ى−٤٨ى^{٢}

(٣٤) م^{٣}+١٢ل م−٤٨م^{٢} (٣٥) ٢ل^{٢}م−٤ل م+٢م

(٣٦) ٢ل^{٣}−٣ل−١٨ (٣٧) م−١٨١ل^{٢}م

(٣٨) $ل^{٢}م^{٢}+٤ل^{٢}م+٤ل^{٢}$ (٣٩) $ل^{٥}+٤ل^{٤}+ل^{٢}$

(٤٠) $١٦٣-٣ل^{٤}$ (٤١) $ل م^{٢}+٦ل م ن-١٦ل ن^{٢}$

(٤٢) $٣ل^{٤}-٨ل^{٣}+٨ل^{٢}$ (٤٣) $٤-١٠٠ل^{٤}$

(٤٤) $٧ل^{٢}+٢٨ل م+٢٨م^{٢}$ (٤٥) $٣ل^{٢}-٩ل-٣٠$

(٤٦) $٤ك^{٥}-٤ك^{٣}-٣٦٠ك$ (٤٧) $٣ك^{٣}-٣ك^{٤}+٦٠ك^{٢}$

(٤٨) $٥٦ل+ل^{٣}-ل^{٢}$ (٤٩) $٣ك^{٤}-٢١ك^{٣}-٥٤ك^{٢}$

(٥٠) $ل^{٥}-١٨ل^{٣}+٨١ل$

العاد الاكبر

١١٨. **العاد** اسم آخر لضلع الكمية او قاسمها لانه يعدّها او يتكرر فيها

١١٩. **العاد المشترك** هو الضلع او العاد الذي يشترك بين كميتين او اكثر

١٢٠ يقال لكميتين او لعدة كميات انها اولية بعضها مع بعض اذا لم يكن لها ضلع مشترك

١٢١. **العاد الاكبر** ويقال له العاد الاكبر المشترك لكميتين او اكثر هو اكبر مقدار يقسمها بدون باقٍ

وبما ان العاد الاكبر المشترك هو اكبر ضلع مشترك بين الكميات المفروضة فيجب ان يشمل جميع الاضلاع الاولية المشتركة ويكون مساوياً لحاصلها

مثال ١. جد العاد الاكبر لـ $١٢ك^{٢}$ و $١٨ك^{٢}ى^{٢}$ و $٢٤ك^{٥}ى$

١٢ ك^{٢} − ٢×٢×٢×ك^{٢}
١٨ ك^{٢}ى^{٢} − ٢×٢×٢×ك^{٢}×ى^{٢}
٣٤ ك^{٥}ى − ٢×٢×٢×٢×ك^{٥}×ى

فاذًا العاد الاكبر − ٢×٢×ك^{٢} − ٦ك^{٢}

الامتحان ١٢ ك^{٢} + ٦ك^{٢} − ٢
١٨ ك^{٢}ى^{٢} + ٦ك^{٢} − ٩ ك ى^{٢} } ٢، ٩ك ى^{٢}، ٤ك^{٢}ى
٣٤ ك^{٥}ى + ٦ك^{٢} − ٤ك^{٢}ى } ليس لها ضلع مشترك

مثال ٣. جد العاد الاكبر لـ ٢ل^{٢} − ٢ل م^{٢} و ٢ل^{٤} − ٦ل^{٢}م + ٢م^{٤}

٢ل^{٢} − ٢ل م^{٢} − ٢ل (ل^{٢} − م^{٢}) − ٢ل (ل + م) (ل − م)
٢ل^{٤} − ٦ل^{٢}م + ٢م^{٤} − ٢ل^{٢} (ل^{٢} − ٢ل م + م^{٢}) − ٢ل^{٢} (ل − م) (ل − م)
فاذًا العاد الاكبر − ٢ل (ل − م)

الامتحان: (٢ل^{٢} − ٢ل م^{٢}) + ٢ل (ل − م) − ل + م
(٢ل^{٤} − ٦ل^{٢}م + ٢م^{٤}) + ٢ل (ل − م) − ل (ل − م)
والخارجان (ل + م) و ل (ل − م) اوليان

تمرين

اجب ما استطعت شفاهًا

جد العاد الاكبر ل،

(١) ١٢ و ١٨ (٢) ٢٤ و ٥٦ (٣) ٩٦ و ١٤٤
(٤) ٨٤ و ١٩٦ (٥) ١٢٥ و ٢٢٥ (٦) ٦٤ و ٩٦ و ٢٥٦

(٧) ٩٠ و ١٠٨ و ٢٣٤ (٨) ١٢ م^{٤} و ١٨ م^{٢}

(٩) ١٨ ل و ٢٧ ل^{٢} (١٠) ١٢ ن و ٢٠ ن ى

(١١) ١٠ ك^{٢} و ٢٥ ك ى^{٢} (١٢) ٤ م^{٢} و ٧ م^{٢}

(١٣) ١٤ ل م^{٢} و ٢٢ ل م^{٣} (١٤) ٨ ك^{٢} ى و ١٠ ك^{٢} ى^{٢} و ١٤ ك^{٤} ى^{٢}

(١٥) ٦ م^{٢} ن^{٤} و ١٥ م^{٣} ن^{٢} و ٢٤ م^{٤} ن^{٢}

(١٦) ٧ ل^{٢} ص^{٢} و ٢١ ل ص^{٤} و ٤٩ ل^{٢} ص^{٢}

(١٧) ١٦ ل^{٤} م^{٤} و ٤٠ ل^{٣} م^{٥} و ٦٤ ل^{٥} م^{٦}

(١٨) (ك + ى)^{٢} و ٣ ك (ك + ى)

(١٩) ٢ ل (ر – ص)^{٢} و ٤ ل (ر – ص) (ر + ص)

(٢٠) ٨ ل (ل^{٢} + م^{٢}) (ل + م) و ٤ ل^{٢} (ل + م) (ل – م)

(٢١) ك^{٢} – ى^{٢} و ك^{٢} + ٢ ك ى + ى^{٢}

(٢٢) ك^{٢} – ٩ و ك^{٢} – ٥ ك + ٦

(٢٣) ك^{٢} + ٣ ك – ١٠ و ك^{٢} + ٦ ك + ٥

(٢٤) ك^{٣} – ٤ ك و ك^{٢} – ٨ ك^{٢} + ١٢ ك

(٢٥) ل^{٣} + ٨ و ل^{٢} + ٤ ل + ٤

(٢٦) ك^{٣} – ٣ ك – ٢٥ و ك^{٢} + ٣ ك – ١٠

(٢٧) ك^{٤} – ٣ ك^{٢} + ١ و ك^{٢} – ٣ ك + ١

(٢٨) ٦ ل^{٣} – ل – ٢ و ٣ ل^{٢} + ٧ ل – ٦

(٢٩) ٢ ل^{٢} + ٣ ل م – ٥ م^{٢} و ٢ ل^{٢} + ٧ ل م + ٥ م^{٢}

(٣٠) م^{٣} – م – ١٢ و م^{٢} – ٦ م + ٨ و م^{٢} + ٣ م – ٢٨

(٣١) ل^{٤} – م^{٤} و ل^{٤} + ٢ ل^{٣} م + م^{٤} و ٣ ل^{٢} م + ٣ ل م^{٣}

المعدود الاصغر

١٣٢. معدود الكمية هو حاصل ضربها في كمية اخرى او ما ينقسم على الكمية المفروضة بدون باقٍ.

١٣٣. المعدود الاصغر ويقال له المعدود الاصغر المشترك لكميتين او جملة كميات هو اصغر كمية تنقسم على كلٍ من الكميات المفروضة بدون باقٍ.

١٣٤. يجب ان ينبه ذهن الطالب الى ان المعدود الاصغر يتضمن جميع الاضلاع الاولية للكميات المفروضة وان كل ضلع يؤخذ حيث يتكرر اكثر

مثال ١. جد المعدود الاصغر لـ ٢٤ك^{٢}ى^{٢} و ٣٦ك^{٤}ى و ٥٤ك^{٢}ى^{٢}ل

٢٤ك^{٢}ى^{٢} = ٢×٢×٢×٣ك^{٢}ى^{٢}

٣٦ك^{٤}ى = ٢×٢×٣×٣ك^{٤}ى

٥٤ك^{٢}ى^{٢}ل = ٢×٣×٣×٣ك^{٢}ى^{٢}ل

فاذاً المعدود الاصغر = ٢×٢×٢×٣×٣×٣ك^{٤}ى^{٢}ل = ١٦٢ك^{٤}ى^{٢}ل

مثال ٢. جد المعدود الاصغر لـ ٢ل^{٢} + ٩ل م و ٢ل^{٢} − ١٨ل م^{٢} و ل^{٢} + ٦ل^{٢}م + ٩ل م^{٢}

٢ل^{٢} + ٩ل م = ٢ل (ل + ٢)

٢ل^{٢} − ١٨ل م^{٢} = ٢ل (ل^{٢} − ٩م^{٢}) = ٢ل (ل + ٣) (ل − ٣م)

ل^{٢} + ٦ل^{٢}م + ٩ل م^{٢} = ل (ل + ٣م) (ل + ٣م)

فاذاً المعدود الاصغر = ٢ل (ل + ٣م)^{٢} (ل − ٣م)

تمرين

اجب ما استطعت شفاهاً

جد المعدود الاصغر لِ

(١) ١٢ و ١٨ (٢) ٣٢ و ٤٨ (٣) ٢٠ و ٢٨

(٤) ٩٦ و ١٤٤ (٥) ٦٤ و ١٢٠ و ٢١٦ (٦) ١٢٨ و ١٦٠ و ٢٠٠

(٧) ك^{٢} ى و ك ى^{٢} و ك ى^{٣} (١٢) ٥ ل^{٢} و ١٠ م^{٢} و ١٥ س^{٢}

(٨) ٤ ك^{٢} و ١٠ ى^{٢} (١٣) ٤ ل^{٢} و ٦ ل^{٢} م و ١٠ ل م^{٢}

(٩) ٤ ك ى و ٦ ك^{٢} ى (١٤) ٣٠ ك و ١٥ ك ى و ١٢ ك ى^{٢}

(١٠) ٨ م ن و ١٢ ن^{٢} (١٥) ١٢ ى^{٢} و ٨ ك^{٢} ى و ١٥ ك^{٢}

(١١) ك و ك^{٢} + ك (١٦) ٢٧ ل^{٤} و ٦ ل^{٢} م و ١٨ ل^{٢} م^{٢}

(١٧) ل ك + ل ى و م ى + م ك

(١٨) ٣ ل + ٣ م و ٦ د^{٢} ل + ٦ د^{٢} م

(١٩) ك^{٢} – ١ و ك^{٢} + ك (٢٠) ل^{٢} + ل م و ل م + م^{٢}

(٢١) (ك + ٣)(ك + ٥) و (ك + ٣)(ك – ٣)

(٢٢) (م – ٢ن)^{٢} و (م + ن)

(٢٣) (١ + م)^{٣} و (١ + م)(١ – م) و (١ + م)^{٢}

(٢٤) ٣ (ل + م)^{٢} و ٤ (ل + م)(ل – م) و ٣ (ل – م)^{٢}

(٢٥) ٥ ل + ٥ م و ل^{٢} – م^{٢}. (٢٦) ك^{٢} – ى^{٢} و ك^{٢} – ٢ ك ى + ى^{٢}

(٢٧) ك^{٢} − ٩ وك^{٢} − ٥ ك + ٦ (٢٨) ل^{٢} − ٤ ول^{٢} − ٨ ل − ٢٠

(٢٩) ل^{٢} − ل − ٦ ول^{٢} + ل − ٢ ول^{٢} − ٤ ل + ٤

(٣٠) ل^{٢} + ل − ٢٠ ول^{٢} − ١٠ ل + ٢٤ ول^{٢} − ل − ٢٠

القسم الثاني

١٣٥. الكمية الاولية هي التي لا تقبل القسمة بدون باقٍ الاّ على نفسها وعلى الواحد. مثل م ، ن ، ل + م ، ل − م ، ل^{٢} + م^{٢} ، ل^{٤} + م^{٤} ، ...

١٣٦. تحليل الكمية الى اضلاعها الاولية هو عبارة عن ايجاد جميع الكميات الاولية التي اذا ضربت بعضها في بعض تنتج الكمية المفروضة

مثالة: اضلاع ل^{٤} − م^{٤} الاولية هي (ل^{٢} + م^{٢}) ، (ل + م) ، (ل − م) نعم ان ل^{٢} − م^{٢} هي ضلع ولكنها ضلع مؤلف اي غير اوّلي

الحالة الاولى

١٣٧. اذا وجد ضلع مشترك بين جميع الحدود . سواء كان ذلك الضلع حدًّا بسيطًا او مركبًا محصورًا بالاقواس

تمرين

جد اضلاع ما يأتي:

(١) ٢ ل^{٢} م^{٢} − ٤ ل^{٢} ك + ٢ ل^{٢} (٢) ½ ل م + ½ ل ن

(٣) ٢ب ل^{٢} + ٢ب ل ط (٤) ½ب ل + ½ب م + ½ب ن

(٥) ⅛ ل م + ⅛ ك م + ⅛ ى م (٦) ٥ (ل + م) ك + ٩ (ل + م) ن

(٧) ٤ (ل + م) ك^{٢} ى^{٢} + ١١ (ل + م) ك^{٢} ى^{٢}

(٨) ٦ (ل – م) ك^{٢} ن + ٨ (ل – م) ك ن^{٢}

(٩) (٣ل – م)^{٢} – (٣ل – م)^{٥}

(١٠) ٢ل (م – ن)^{٢} + ٢ب (م – ن)^{٢}

(١١) ½ب (ك – ى) + ½ل (ك – ى)

(١٢) ½ل (ب + ت) – ½ل (ك + ى)

(١٣) ل (م + ن) + ب (م + ن) – د (م + ن)

(١٤) ك^{٢} – ى^{٢} + ٣ (ك – ى)

(١٥) ل^{٢} – م^{٢} + ل – م (١٦) ل^{٢} – م^{٢} + ل + م

١٣٨. ويقع تحت هذه الحالة الكميات التي يمكن ترتيب حدودها اقساماً لكل منها ضلع مركب مشترك بين الجميع

مثاله : ل ك + ل ى + م ك + م ى فهذه الكمية تساوي ل (ك + ى) + م (ك + ى) وبقسمة الحدين على (ك + ى) يخرج ل + م

فاذاً ل ك + ل ى + م ى + م ك = (ك + ى) (ل + م)

تنبيه : الكميات التي يمكن ترتيب حدودها اقساماً لكل منها ضلع مركب مشترك بين الجميع تتألف في الغالب من عدد مزدوج من الحدود اي من ٤ او ٦ او ٨ ... ١ ج

تمرين

جد اضلاع ما يأتي :

(١) ٢(ك + ى) + ٥(ك + ى) (٢) ل(م + ن) + (م + ن)

(٣) ل(ل − م) − م(ل − م) (٤) ٢ل(٢ل − م) + ٣م(٢ل − م)

(٥) ل(ك − ى) + م(ى − ك) هذه يمكن كتابتها ل(ك − ى) − م(ك − ى) [لماذا ؟]

(٦) ب(ل − م) + ت(م − ل) (٧) ك(ل − ٣م) − ٨(٣م − ل)

(٨) ٣ى(ك − ٤ن) + (٤ن − ك)

(٩) ب ت + ب ك + م ت + م ك

الحل : ب ت + ب ك + م ت + م ك − (ب ت + ب ك) + (م ت + م ك)

− ب(ت + ك) + م(ت + ك)

− (ت + ك)(ب + م)

(١٠) ب ك − ت ك + ب − ت − (ب ك − ت ك) + (ب − ت)

− ك(ب − ت) + ١(ب − ت)

− (ب − ت)(ك + ١)

يمكن في السؤالين السابقين ان نرتب الحدود بطريقة اخرى كما يأتي :

ب ك − ت ك + ب − ت = ب ك + ب − ت ك − ت = (ب ك + ب)

− (ت ك + ت) = ب(ك + ١) − ت(ك + ١) = (ك + ١)

(ب − ت)

وعلى كل حال يجب ان يراعى في ترتيبها وجود ضلع مشترك بين حدّي كل قسم او (فرقة)

(١١) ب ك + ت ك + ب ى + ت ى

(١٢) س ل + ل٢ + م س + م ل (١٣) ب ك + ٢ ب – ل ك – ٢ ل

(١٤) ٢ ل٢ + ١٠ ل م – ٤ ل – ٢٠ م

(١٥) ك ى + ٢ ك + ٢ ى + ٦ (١٦) ٦ ب ت – ٢ ب س + ٢ ت – س

(١٧) ١٢ ب ك – ٦ ب ى – ٥٠ س ك + ٢٥ س ى

(١٨) ٥ ب٢ + ١٠ ب – ٥ ب٢ – ١٠

(١٩) ب ل + ت ل + س ل + ب م + ت م + س م

(٢٠) ل ج + ٢ ل ه + ل ن – م ج – ٢ م ه – م ن

الحالة الثانية

١٣٩. الكمية الثلاثية اذا كانت مربعاً تامًّا يكون شكلها ل ± ٢ ل م + م٢ واضلاع ل٢ + ٢ ل م + م٢ تكون (ل ± م)٢

مثال ١. ٩ ل٢ – ١٢ ل م + ٤ م٢ = (٣ ل – ٢ م)٢

مثال ٢. (ل – م)٢ + ٤ (ل – م) ن + ٤ ن٢ = [(ل – م) + ٢ ن]٢

= (ل – م + ٢ ن)٢

تمرين

جد اضلاع ما يأتي:

(١) ل٢ + ٦ ل + ٩ (٢) م٢ – ١٠ م + ٢٥

(٣) $ن^{٢}+١٢ن+٣٦$ (٤) $س^{٢}-١٢س د+٣٦د^{٢}$

(٥) $ك^{٤}+١٤ك^{٢}ى+٤٩ى^{٢}$ (٦) $م^{٢}-٣٤م ن+١٤٤ن^{٢}$

(٧) $ك^{٤}+٤ك^{٢}ى^{٢}+٤ى^{٤}$ (٨) $(ل+م)^{٢}-٦(ل+م)+٩$

(٩) $(ل-م)^{٢}-٨(ل-م)+١٦$

(١٠) $(م-ن)^{٢}-٢(م-ن)+١$

(١١) $(٣م+ن)^{٢}-١٢(٣م+ن)+٣٦$

(١٢) $(ك-ى)^{٢}-٦(ك-ى)ل+٩ل^{٢}$

(١٣) $٩(ل-م)^{٢}-١٢(ل-م)ن+٤ن^{٢}$

(١٤) $١٦(٢ل-٣)^{٢}-١٦ل م+٢٤م+٣$

(١٥) $٢٥(ب-ت)^{٢}-١٢٠(ب-ت)ل م+١٤٤ل^{٢}م^{٢}$

(١٦) $ل^{٢}+م^{٢}+ن^{٢}+٢ل م+٢ل ن+٢م ن$

(١٧) $ل^{٢}+م^{٢}+ن^{٢}-٢ل م-٢ل ن+٢م ن$

الحالة الثالثة

١٣٠. فضلة مربعين أو الفرق بين مربعين

مثال ١. $(ل-م)^{٢}-٢٥=[(ل-م)+٥][(ل-م)-٥]$

$=(ل-م+٥)(ل-م-٥)$

مثال ٢. $(٢ل+٤ن)^{٢}-(٢ل+٣ن)^{٢}=[(٢ل+٤ن)+(٢ل+٣ن)][(٢ل+٤ن)-(٢ل+٣ن)]$

$=(٢ل+٤ن+٢ل+٣ن)(٢ل+٤ن-٢ل-٣ن)$

$=(٥ل+٧ن)(ل+ن)$

تمرين

جد اضلاع ما يأتي:

(١) $١٦ك^{٤}-٢٥$ (٢) $١٦ل^{٢}-٢٥م^{٢}$ (٣) $١٤٤ك^{٢}-٤٩ى^{٢}$

(٤) $ل^{٢}م^{٤}-١٢١$ (٥) $٨١ل^{٢}-٦٤م^{٢}$ (٦) $ل^{٤}-م^{٤}$

(٧) $ك^{٨}-ى^{٨}$ (٨) $١-١٦ك^{٤}$ (٩) $(ل+م)^{٢}-١$

(١٠) $ل^{٢}-(م+١)^{٢}$ (١١) $(ل-م)^{٢}-٩$

(١٢) $٤(ل-م)^{٢}-١$ (١٣) $(ب+ت)^{٢}-٤$

(١٤) $(ك-ى)^{٢}-٤م^{٢}$ (١٥) $٤(م+ن)^{٢}-٣٦$

(١٦) $٤-(ل-م)^{٢}$ (١٧) $٨١-٢٥(ك-ى)^{٢}$

(١٨) $٤ل^{٢}-(٢م+ن)^{٢}$ (١٩) $(ل-م)^{٢}-(ل+م)^{٢}$

(٢٠) $(ل-م)^{٢}-(م-ن)^{٢}$ (٢١) $(ل+٢م)^{٢}-(ل-٣م)^{٢}$

(٢٢) $(ل-٣م)^{٢}-٤(ل+م)^{٢}$ (٢٣) $٩(ل+م)^{٢}-(٢ل-٥م)^{٢}$

(٢٤) $ل^{٢}+٢ل م+م^{٢}-ن^{٢}$ (٢٥) $ل^{٢}-٢ل م+م^{٢}-٩ن^{٢}$

(٢٦) $ل^{٢}-م^{٢}-٢م ن-ن^{٢}$ (٢٧) $٩ل^{٢}-م^{٢}-٨م ن-١٦ن^{٢}$

(٢٨) $ك^{٢}+ى^{٢}+٢ك ى-٩ل^{٢}$ (٢٩) $ك^{٢}-٤م^{٢}+ى^{٢}+٢م ى$

(٣٠) $ك^{٢}-٢ك ى+ى^{٢}-١٦م^{٢}$

(٣١) $ل^{٢}-م^{٢}-١٢م ن-٣٦ن^{٢}$

(٣٢) $ك^{٢}+٢ك ى+ى^{٢}-ل^{٢}-٢ل م-م^{٢}$

(٣٣) $ك^{٢}-١+ى^{٢}-م^{٢}+٢ك ى+٢م$

(٣٤) $١+٢ب س+٢ل-س^{٢}-ب^{٢}+ل^{٢}$

(٣٥) ل^{٢} − ٩م^{٢}ك^{٢} − ١ + ٦مك − ١٠ل م + ٢٥م^{٢}

(٣٦) (ل + م)^{٢} − (٢ل − ٣م)^{٢}

(٣٧) ك^{٢} + ٤ى^{٢} − ٩ص^{٢} − ١ − ٤كى − ٦ص

تمرين للمراجعة

(١) ك^{٢} − ك (٢) ٤ك^{٢} + ٤ك + ١ (٣) ل^{٨} − ٢ل^{٤} + ١

(٤) ك^{٥} − ٨ك^{٢} + ١٦ك (٥) ل^{٥} − ل

(٦) ل^{١٠} − ل^{٢} (٧) ل^{٤} − ١٣ل^{٢} + ٣٦

= ل^{٤} − ١٣ل^{٢} + ٣٦ − ل^{٢} او (ل^{٢} − ٤)(ل^{٢} − ٩)

= (ل^{٤} − ١٣ل^{٢} + ٣٦) − ل^{٢}

= (ل^{٢} − ٦)^{٢} − ل^{٢}

= (ل^{٢} − ل − ٦)(ل^{٢} + ل + ٦)

(٨) ل^{٤} − ١٨ل^{٢}م^{٢} + ٦٤م^{٤} (٩) ٤ك^{٤} − ١٢ك^{٢}ى^{٢} + ٩ى^{٤}

(١٠) ك^{٢} − ٤ى^{٢} + ٩ − ٦ك (١١) ل^{٢} + ٤ل م + ٤م^{٢} − ٣٦

(١٢) ل م^{٢} − ل م ن^{٢} (١٣) ل^{٢} + ٢ل (م + ن) + (م + ن)^{٢}

(١٤) ل^{٤} − ٢ل^{٢}م + ل^{٢}م^{٢} (١٥) ل^{٢} − ل + ل^{٢}ب − ب

الحالة الرابعة

١٣١. الكمية الثلاثية التي هي من شكل ك^{٢} + ب ك + س

مثال ١. ك^{٢} − ٢ك − ٦٣ = (ك − ٩)(ك + ٧)

مثال ٢. (ل - م)٢ + ٥(ل + م) + ٦ = [(ل - م) + ٢][(ل - م) + ٣]
= (ل - م + ٢)(ل - م + ٣)

تمرين

جد اضلاع ما يأتي:

(١) ل٢ + ٨ل + ١٢ (٢) ك٢ - ٥ك + ٦
(٣) م٢ + ١٤م + ٤٣ (٤) ك٢ - ك - ١٢
(٥) ل٢ + ل - ٥٦ (٦) ل٢ م٢ - ٩ل م + ١٨
(٧) ى٢ - ٢ى - ٦٣ (٨) م٤ + ٣م٢ - ٤٠
(٩) ل٢ - ٦ل - ٥٥ (١٠) ك٢ - ٥ك ى - ٢٤ى٢
(١١) م٤ - ٩م٢ + ٨ (١٢) ل٤ - ل٢ م٢ - ١٢م٤
(١٣) ك٢ + ١١ك ى - ٢٦ى٢ (١٤) ك٤ - ك٢ ى٢ - ٧٢ى٤
(١٥) ى٢ + (ل + م)ى + ل م (١٦) ى٢ + (٣ل - ٣م) - ٦ل م
(١٧) (ل + م)٢ - ٧(ل + م) + ١٠
(١٨) (ل + م)٢ - ٤(ل + م) - ٢١ (١٩) (ك + ى)٢ - (ك + ى) - ٦
(٢٠) (٣ل + م)٢ + ١١(٣ل + م) + ٢٤
(٢١) (ل - م)٢ + ٣(ل - م) - ٣٨
(٢٢) ٦٤ - ١٦(ك - ى) + (ك - ى)٢

الحالة الخامسة

١٣٣. الكمية الثلاثية التي هي من شكل م ك٢ + ب ك + س اي اذا كان معنى اكبر قوة فيها غير الواحد الصحيح. ولبيان استخراج اضلاعها نبدأ بما يأتي:

(١) (٢ك+١)(ك+٢)= ٢ك٢+٤ك+ك+٢=٢ك٢+٥ك+٢

(٢) (٢ك−١)(ك−٤)=٢ك٢−٨ك٢−ك+٤=٢ك−٩ك+٤

(٣) (٢ك−٣)(ك+٥)=٢ك٢+١٠ك − ٣ك−١٥ = ٢ك٢ +٧ك−١٥

(٤) (٢ك+٣)(ك−٥) = ٢ك٢− ١٠ك +٣ك − ١٥=٢ك٢ −٧ك−١٥

واذا دققنا النظر نجد ان الحاصل الثلاثي مؤلف من الحدود الآتية :

(١) الحدّ الاول هو حاصل الاول في الاول مثل ٢ك×ك = ٢ك٢

(٢) الحدّ الثاني هو مجموع حاصل الاوسطين وحاصل الطرفين مثل ٤ك +ك=٥ك

(٣) الحدّ الثالث هو حاصل الثاني في الثاني مثل ١×٢=٢

(٤) اذا اتفق المضروبان بالعلامة التي تصل الاول بالثاني كان الحدّ الثاني من الحاصل مثل العلامة نفسها والحدّ الثالث ايجابيًا

اما اذا اختلفا بالعلامة كان الحدّ الثالث سلبيًا والحدّ الثاني نظير اكبر الحاصلين اللذين يتألف منهما هو نفسه

١٣٣ . اذا طلب منا ان نحلّ كميات كالتي على يسار المتطابقات في الامثلة السابقة فاننا نجري عكس ما جرينا في طريقة تركيبها . وهذا نبسطه في حلّ المثال الآتي الى اضلاعه الاولية : ١٢ك٢ +٣٤ك +٥

بما ان حاصل الحدين الاولين ١٢ك٢ فهما ٦ك و٢ك او ٣ك و٤ك او ١٢ك وك

وبما ان حاصل الحدين الاخيرين ٥ فهما ٥ و ١

وبما ان الحدّ الثالث ايجابي فالعلامات متفقة وبما ان علامة الحدّ الثاني "+"

فالعلامات ايجابية

نجرّب اولاً (٣ك + ٥)(٦ك + ١) ومنها يكون الحد الاوسط ٣٣ك فالاختيار اذاً غير صحيح . واذا ابدلنا ٥ و ١ بوضعها في غير المراكز التي وضعت فيها اولاً كان الحد الاوسط ١٦ك وهذا ايضاً غير صحيح وعليه فالضلعان ٣ك و ٦ك يجب رفضهما وكذلك يجب رفض ١٢ك و ك

والآن نجرب (٣ك + ٥)(٤ك + ١) وبما ان الحد الاوسط يكون ٣ك + ٢٠ك = ٢٣ك فالضلعان (٣ك + ٥)(٤ك + ١) هما المطلوبان

تنبيه : يصعب على المبتدىء ان يستخرج الاضلاع المطلوبة لاول وهلة ويتعذر عليه ان يجدها بالسرعة التي يتوقعها لنفسه ولكن كثرة التمرين على التحليل تمكنه من التغلب على تلك الصعوبة وتولد فيه السرعة المطلوبة

تمرين

جد اضلاع ما يأتي :

(١) ٢ك^{٢} + ٥ك + ٣
(٢) ٣ك^{٢} + ٥ك + ٢
(٣) ٢ك^{٢} + ٧ك + ٣
(٤) ٢ك^{٢} − ٧ك + ٣
(٥) ٦ك^{٢} + ١١ك + ٣
(٦) ٤م^{٢} + ٨م + ٣
(٧) ٦ل^{٢} + ٥ل + ١
(٨) ٣م^{٢} + ٧م + ٥
(٩) ٣ى^{٢} + ٨ى + ٥
(١٠) ٤ل^{٢} + ٨ل + ٣
(١١) ٣م^{٢} + ٨م + ٤
(١٢) ٥ى^{٢} − ٨ى + ٣
(١٣) ٥ل^{٢} − ٧ل + ٢
(١٤) ٣م^{٢} − ٧م + ٤
(١٥) ٤ى^{٢} − ٩ى + ٥
(١٦) ٩ل^{٢} − ٩ل + ٢

(١٧) ٦م^{٢} − ١١م + ٤ (١٨) ٣ى^{٢} − ١٧ى + ٢٠

(١٩) ٦ل^{٢} − ١٩ل + ٣ (٢٠) ١٤م^{٢} − ١١م + ٢

(٢١) ٩ل^{٢} − ١٢ل م + ٤م^{٢} (٢٢) ٢ل^{٢} + ١٠ل − ٨

الحل : بما ان علامة ٨ "−" فعلامتا الضلعين مختلفتان وبما ان الحد الاوسط + ١٠ل فعلامة الحاصل الاكبر "+"

ضع الاقواس وجرّب فيها اضلاع ٢ل^{٢} و٨ مع العلامات اللازمة واخيرًا تجد الجواب (٢ل − ٢) (ل + ٤)

(٢٣) ٢ل^{٢} + ٥ل − ٣ (٢٤) ٣م^{٢} + ٨م − ٣

(٢٥) ٣ى^{٤} + ٧ى^{٢} − ٦ (٢٦) ٦ل^{٢} + ٧ل − ٥

(٢٧) ٥م^{٢} + ٧م − ٦ (٢٨) ٣ى^{٢} + ٥ى − ٢

(٢٩) ٥ل^{٢} + ٢ل − ١٦ (٣٠) ٤م^{٢} + ١١م − ٣

(٣١) ١٢ى^{٢} + ٨ى − ١٥ (٣٢) ٢٤ل^{٢} − ل − ١٠

بما ان علامة الحد الاخير "−" فعلامتا الضلعين مختلفتان وبما ان علامة الحد الاوسط "−" فعلامة الحاصل الاكبر "−"

ضع الاقواس وجرّب فيها اضلاع ٤ل^{٢} و١٠ مع العلامات اللازمة واخيرًا تجد الجواب المطلوب (٨ل + ٥) (٢ل − ٢)

(٣٣) ٢ل^{٢} − ٢٠ل − ٢ (٣٤) ٢م^{٢} − م − ٣

(٣٥) ٥ى^{٢} − ى − ٤ (٣٦) ٤ل^{٢} − ٧ل − ١٥

(٣٧) ٣م^{٢} − م − ٢ (٣٨) ٣ى^{٢} − ٥ى − ٣

(٣٩) ٦ل^{٢} − ل − ٢ (٤٠) ٦م^{٢} − ٥م − ٦

(٤١) ١٢ ى^{٢} - ى - ٦ (٤٢) ١٤ ل^{٢} - ل - ٣

(٤٣) ٢١ م^{٢} - م - ٢ (٤٤) ٤٢ ى^{٢} - ٩ى - ٦

١٣٣ . طريقة ثانية لحلّ الشكل م ك^{٢} + ب ك + س الى اضلاعه الاولية

يسهل حلّ الكمية المركبة الثلاثية الى اضلاعها بالتفريق والترتيب اذا استطعنا ان نجد عددين صحيحين حاصلهما م س ومجموعهما الجبري ب

تنبيه : اذا لم يكن من عددين صحيحين حاصلهما م س ومجموعهما الجبري ب فالكمية اولية

ولبيان ذلك نحلّ بهذه الطريقة الامثلة التي حللناها قبلاً

مثال ١ . ١٢ ك^{٢} + ٢٣ ك + ٥

الحلّ : م س = ١٢ × ٥ = ٦٠ و ب = ٢٣ . واضلاع ٦٠ هي ١ × ٦٠ و ٥ × ١٢ و ١٥ × ٤ و ٢٠ × ٣ و ٢ × ٣٠ ولكن الضلعين اللذين مجموعهما ٢٣ هما ٣ × ٢٠

وعليه نفك مسمى الحد الاوسط ٢٣ الى ٣ و ٢٠ ونكتب الكمية كما ياتي : ١٢ ك^{٢} + ٣ ك + ٢٠ ك + ٥ = ٣ ك (٤ ك + ١) + ٥ (٤ ك + ١)

= (٤ ك + ١) (٣ ك + ٥) وهو نفس الجواب الذي وجدناهُ قبلاً

مثال ٢ . ٣ ى^{٢} + ١٠ ى - ٨

الحلّ : م س = ٣ × (- ٨) = - ٢٤ و ب = ١٠ . واضلاع ٢٤ = ١ × ٢٤ و ٢ × ١٢ و ٣ × ٨ و ٤ × ٦ وبما ان الحاصل سلبي فعلامتا الضلعين مختلفتان ومجموعهما الجبري + ١٠ فهما اذاً + ١٢ و - ٢

فاذاً ٣ ى^{٢} + ١٠ ى - ٨ = ٣ ى^{٢} + ١٢ ى - ٢ ى - ٨

= ٣ ى (ى + ٤) - ٢ (ى + ٤) = (ى + ٤) (٣ ى - ٢)

اذا شاء الاستاذ فليطلب من التلامذة حل بعض المسائل التي وردت في التمرين السابق على هذه الطريقة وذلك لاجل الممارسة واللذة العقلية ولانها ترد كثيرًا في حلّ المعادلات العالية ونظريها

الحالة السادسة

١٣٤. مجموع مكعبين والفرق بينهما

اذا قسمنا $ل^٣ + م^٣$ على $ل + م$ فالخارج يكون $ل^٢ - ل م + م^٢$

واذا قسمنا $ل^٣ - م^٣$ على $ل - م$ فالخارج يكون $ل^٢ + ل م + م^٢$

فاذًا: $ل^٣ + م^٣ = (ل + م)(ل^٢ - ل م + م^٢)$

و$ل^٣ - م^٣ = (ل - م)(ل^٢ + ل م + م^٢)$

وعليهِ يمكننا ان نستنتج كيفية تحليل اي مقدار يمكن وضعهُ بشكل مجموع مكعبين او فرقهما

مثال ١. $ك^٣ + ٢٧ = ك^٣ + (٣)^٣ = (ك + ٣)(ك^٢ - ك \times ٣ + ٩)$

$= (ك + ٣)(ك^٢ - ٣ ك + ٩)$

مثال ٢. $٦٤ ل^٣ - ٢٧ م^٣ = (٤ ل)^٣ - (٣ م)^٣ = (٤ ل - ٣ م)[(٤ ل)^٢ + (٤ ل)(٣ م) + (٣ م)^٢]$

$= (٤ ل - ٣ م)(١٦ ل^٢ + ١٢ ل م + ٩ م^٢)$

تمرين

جد اضلاع الكميات الآتية:

(١) $ك^٣ + ى^٣$ (٢) $ك^٣ + ١$ (٣) $ك^٣ - ى^٣$

(٤) $ك^٣ - ١$ (٥) $ل^٣ - ٨$ (٦) $٢٧ - ل^٣$

(٧) $٦٤ ل^٣ - ١$ (٨) $ل^٣ - م^٦$ (٩) $ك^٣ + ٨ ل^٣$

(١٠) $ل^{٢}+م^{٢}$ (١١) $٨ل^{٢}-٢٧م^{٢}$ (١٢) $٢٧ل^{٢}+٦٤م^{٢}$

(١٣) $١٢٥ك^{٢}+٨ى^{٢}$ (١٤) $٢١٦-٢٧ل^{٢}$ (١٥) $١-٣٤٣ل^{٢}$

(١٦) $ل^{٢}م^{٢}+٥١٢$ (١٧) $١٠٠٠ى^{٢}-١$

(١٨) $٨ل^{٢}م^{٢}+١٢٥ى^{٢}$ (١٩) $٦٤ل^{٦}+١٢٥م^{٢}$

(٢٠) $ل^{٢}+٣٤٣م^{٢}$ (٢١) $١٠٠ل^{٢}-٢٧$

(٢٢) $٣٤٣ل^{٢}+٥١٢م^{٢}$ (٢٣) $٨ل^{٦}-٢٧م^{٢}$

(٢٤) $ل^{٢}م^{٢}+ى^{٢}$ (٢٥) $م^{٦}+٧٢٩ل^{٢}$

(٢٦) $م^{٢}-٦٤ن^{٦}$ (٢٧) $ك^{٦}+ى^{٦}$

(٢٨) $ل^{٦}+م^{٦}=(ل^{٢}+م^{٢})(ل^{٤}-ل^{٢}م^{٢}+م^{٤})$ [انتبه لهذا الشكل]

(٢٩) $ل^{٦}-م^{٦}$

[هذا يعامل اما معاملة الفرق بين مكعبين واما الفرق بين مربعين . والافضل ان يعامل معاملة الفرق بين مربعين]

(٣٠) $ل^{٦}-٦٤$ (٣١) $٦٤م^{٦}+١$ (٣٢) $١-٦٤ل^{٦}$

(٣٣) $ل^{٦}م^{٦}-٦٤$ (٣٤) $ل^{١٢}-م^{٦}$ (٣٥) $ل^{٩}-م^{٩}$

(٣٦) $ك^{٨}-ى^{٨}$ (٣٧) $ك^{٨}-١$ (٣٨) $ك^{١٢}-ى^{١٢}$

(٣٩) $ك^{١٢}+ى^{١٢}$ (٤٠) $ل^{٦}م^{٦}-٧٢٩$ (٤١) $ك^{٢٤}+١$

تمرين للمراجعة

جد اضلاع ما يأتي :

(١) $٦ل-١٢م+٦ن$ (٢) $ك^{٢}-٩ك$

(٣) $٤ل^{٢}+٤ل^{٢}+ل$ (٤) $م^{٤}+٤م^{٢}+٤م^{٢}$

(٥) $ل^{٤}+٨ل^{٢}م+١٦ل^{٢}م^{٢}$ (٦) $ك^{٦}+٢ك^{٣}+١$

(٧) $ل^{٦}-٢ل^{٣}م^{٣}+م^{٦}$ (٨) $ك^{٢}-ك^{٢}ى-٦ك ى^{٢}$

(٩) $ك^{٤}+ك$ (١٠) $ل^{٢}-(م+٢ن)^{٢}$

(١١) $ل^{٤}-٩ل^{٢}+١٨$ (١٢) $ك^{٥}-ك^{٢}$

(١٣) $٨ك^{٣}-٦٤$ (١٤) $٨م^{٦}+٢١٦م^{٣}$

(١٥) $٤(م+ن)^{٢}-ل^{٢}$ (١٦) $(م+ن)^{٢}+٣(م+ن)+١$

(١٧) $٨ك^{٦}+٢١٦ك^{٣}$ (١٨) $٣ك^{٣}-٨ك^{٢}ى+٨ك ى^{٢}$

(١٩) $ل^{٣}-٢٥ل^{٢}+١٤٤ل$ (٢٠) $ك^{٤}-١+٢ل-ل^{٢}$

(٢١) $١-٥م^{٢}+٤م^{٤}$ (٢٢) $م^{٥}-٤م^{٤}-٤٥م^{٣}$

(٢٣) $٧م-٧م^{٣}ل^{٤}$ (٢٤) $م^{٤}-(م-٣)^{٢}$

(٢٥) $ل^{٤}-٢ل^{٢}+١$ (٢٦) $م^{١١}-١$

(٢٧) $٤ل^{٤}-١٢ل^{٢}م^{٢}+٩م^{٤}$ (٢٨) $ك^{٥}-ك^{٣}ى^{٢}-ك^{٢}ى^{٣}+ى^{٥}$

(٢٩) $ك^{٥}+ك^{٣}+٨ك^{٢}+٨$ (٣٠) $ك^{٤}-٢٥٦$

(٣١) $ك^{٧}-ك^{٤}-١٦ك^{٣}+١٦$ (٣٢) $م^{٦}-٧م^{٣}-٨$

١٣٥. ملاحظات:

(١) $(ل^{٢}-م^{٢})\div(ل-م)=ل+م$

$(ل^{٣}-م^{٣})\div(ل-م)=ل^{٢}+ل م+م^{٢}$

$(ل^{٤}-م^{٤})\div(ل-م)=ل^{٣}+ل^{٢}م+ل م^{٢}+م^{٣}$

هنا نرى ان المقسوم عليه $(ل-م)$ وعلامات الخارج دائمًا "+" ودليل حدود المقسوم اما وتريّ او شفعيّ

(٣) $(ل^{٢}+م^{٢})\div(ل+م)=ل^{٢}-ل م+م^{٢}$

$(ل^{٥}+م^{٥})\div(ل+م)=ل^{٤}-ل^{٣}م+ل^{٢}م^{٢}-ل م^{٣}+م^{٤}$

$(ل^{٧}+م^{٧})\div(ل+م)=ل^{٦}-ل^{٥}م+ل^{٤}م^{٢}-\ldots$ الخ

هنا نرى ان المقسوم عليه دائمًا $(ل+م)$ وعلامات الخارج ايجابية وسلبية بالتبادل ودليل حدود المقسوم دائمًا فردية

(٤) $(ل^{٢}-م^{٢})\div(ل+م)=ل-م$

$(ل^{٤}-م^{٤})\div(ل+م)=ل^{٣}-ل^{٢}م+ل م^{٢}-م^{٣}$

$(ل^{٦}-م^{٦})\div(ل+م)=ل^{٥}-ل^{٤}م+ل^{٣}م^{٢}-ل^{٢}م^{٣}+\ldots$

هنا نرى ان المقسوم عليه $(ل+م)$ وعلامات الخارج ايجابية وسلبية بالتبادل ودليل حدّي المقسوم زوجية

(٤) الكميات الجبرية $ل^{٢}+م^{٢}$ و$ل^{٤}+م^{٤}$ و$ل^{٦}+م^{٦}$ و.... التي فيها الدليل زوجي وحدًا كل منها ايجابيان لا تقبل القسمة ابدًا على $ل+م$ ولا على $ل-م$ ويمكن تلخيص كل ما ذكر في هذا البند في ما يلي:

(١) $ل^{د}-م^{د}$ تقبل القسمة على $ل-م$ اذا كانت د اي عدد صحيح

(٢) $ل^{د}+م^{د}$ تقبل القسمة على $ل+م$ اذا كانت د اي عدد صحيح فردي

(٣) $ل^{د}-م^{د}$ تقبل القسمة على $ل+م$ اذا كانت د اي عدد صحيح زوجي

(٤) $ل^{د}+م^{د}$ لا تقبل القسمة على $ل+م$ ولا على $ل-م$ اذا كانت د اي عدد صحيح زوجي

١٣٦. مثال ١. جد اضلاع $ل^{٤}+ل^{٢}م^{٢}+م^{٤}$. هذه الكمية ليست مربعًا تامًا ولكن يمكن جعلها كذلك باضافة $ل^{٢}م^{٢}$ اليها وطرح ذات المقدار لتبقى قيمة

الكمية كما كانت عليه قبلاً وهذا يجعل شكلها كالفرق بين مربعين فنقول :

$$ل^٤+ل^٢م^٢+م^٤ = (ل^٤+٢ل^٢م^٢+م^٤)-ل^٢م^٢$$
$$= (ل^٢+م^٢)^٢-(ل م)^٢$$
$$= (ل^٢+م^٢+ل م)(ل^٢+م^٢-ل م)$$
$$= (ل^٢+ل م+م^٢)(ل^٢-ل م+م^٢)$$

مثال ٢. جد اضلاع : $ل^٤-١٥ل^٢م^٢+٩م^٤$

$$ل^٤-١٥ل^٢م^٢+٩م^٤ = (ل^٤-٦ل^٢م^٢+٩م^٤)-٩ل^٢م^٢$$
$$= (ل^٢-٣م^٢)^٢-(٣ل م)^٢$$
$$= (ل^٢-٣م^٢+٣ل م)(ل^٢-٣م^٢-٣ل م)$$
$$= (ل^٢+٣ل م-٣م^٢)(ل^٢-٣ل م-٣م^٢)$$

وهذا النوع من تحليل الاضلاع مهمّ جدًّا نستخدمه في حلّ بعض المعادلات العالية

تمرين

جد اضلاع ما يأتي :

(١) $ب^٤+ب^٢ت^٢+ت^٤$ (٢) $ل^٤+٤ل^٢م^٢+١٦م^٤$

(٣) $م^٤+٩م^٢ن^٢+٨١ن^٤$ (٤) $ك^٤+٢ك^٢ى^٢+٤ى^٤$

(٥) $ى^٤+١٦ى^٢+٢٥٦$ (٦) $ل^٤+م^٤-٧ل^٢م^٢$

(٧) $م^٤-٦م^٢ن^٢+ن^٤$ (٨) $ك^٤+ى^٤-١٨ك^٢ى^٢$

(٩) $ل^٤+م^٤-١١ل^٢م^٢$ (١٠) $٤م^٤-٥ل^٢م^٢+ل^٤$

(١١) $٩ل^٤+١١ل^٢م^٢+٤م^٤$ (١٢) $٤ل^٤-٢٤ل^٢م^٢+٩م^٤$

تمرين عامّ

حلّ ما يأتي الى اضلاعه الاولية

(١) م ل^{٢} – ٢م ل – ٣٥م (٢) ٣ د^{٢} + ٤ د – ٧

(٣) ل^{٤} + ١٦م^{٤} + ١٦ ل^{٢} م^{٢} (٤) ٣ ك^{٤} + ك^{٢} – ٢

(٥) ٣م^{٢} – ٧٥م (٦) ل^{٢} + ٢ ل^{٢} م^{٢} + ل^{٢} م^{٤}

(٧) ك^{٢} – ٢٧ (٨) ك^{٢} – ك ل + ٢ ك م – ٢ ل م

(٩) ل^{٦} – م^{٦} د^{٦} (١٠) ٢ ل س – ب س + ٦ ل د – ٣ ب د

(١١) ل^{٤} – ١٥ ل^{٢} + ٥٦ ل^{٢} (١٢) ٩ م^{٦} – ٦م^{٣} – ٣٥

(١٣) ٢١٦ + ك^{٣} (١٤) ٢م^{٣} – ١٤م – ٣٦

(١٥) ١٥ د^{٢} – ٦ د – ٢١ (١٦) ٣م^{٣} + ٧ + ٢٢م

(١٧) ل٦ + ٧٢ – ١٨ ل^{٢} (١٨) ٩ د^{٢} + ٣ د – ٥٦

(١٩) (ل + م + ن)^{٢} – (ل – م – ن)^{٢}

(٢٠) ك^{٢} – ١٠ ك – ١١٩ (٢١) ل^{٢} – م^{٢} + د^{٢} – ٢ د ل

(٢٢) ل^{٢} – ٢٥ د^{٢} + ١٠ ل م + ٢٥ م^{٢}

(٢٣) م^{٦} – ٣٤٣ (٢٤) ل^{٢} + م^{٢} – د^{٢} – ٢ ل م

(٢٥) (ل + م)^{٤} – ١ (٢٦) (ك + ى)^{٢} – ١

(٢٧) ٨ (ل + م)^{٣} – (٢ ل – م)^{٣}

(٢٨) ك^{٤} + ى^{٨} – ٢ ك^{٢} ى^{٤} (٢٩) ٨١ ل^{١٠} – ٦٤ م^{١٠}

(٣٠) د^{٢} + د^{٢} م^{٢} + ٣ د م^{٢} + ٣ م^{٤} (٣١) ل^{٢} – م^{٢} + ل – م

(٣٢) $ل^٢+م^٢+ل+م$ (٣٣) $١+٨١ك^٨-١٨ك^٤$

(٣٤) $ك^٤+١٢ك^٢-٦٤$ (٣٥) $ل^٩-٥١٢ل^{١٢}$

(٣٦) $ل^٢-م^٤-١٢ل م+٣٦م^٢$

(٣٧) $ك^٦-ك^٣-٣$ (٣٨) $٣ل^٢م^٢-م^٤-ل^٤$

(٣٩) $ك^٤-ك^٢-١٢$ (٤٠) $٣-ى^٢+٣ى^٢-ى^٥$

(٤١) $٤(ل-م)^٢-(ل-م)$ (٤٢) $ك^٨-١$

(٤٣) $(ل+م)^٤-ن^٤$ (٤٤) $١-(ل-م)^٢$

(٤٥) $(ل+م)^٢+(ل-م)^٢$ (٤٦) $م^٢-٤د^٢+م-٢د$

(٤٧) $(ل+م)^٢+ل+م$ (٤٨) $ل^٢-٩م^٢+ل+٣م$

(٤٩) $١+٣ل+٣ل^٢+ل^٣$ (٥٠) $١-٣ل+٣ل^٢-ل^٣$

(٥١) $ك^٣+٩ك^٢+٢٧ك+٢٧$

(٥٢) $ك^٤+ك^٣+ك^٢-١$ (٥٣) $ك^٣+ل^٣+ك^٢-ل^٢$

١٣٧. العادّ الاكبر لكميتين او اكثر هو الكمية الاعلى درجة التي تقسم كلاً منها بدون باقٍ . اي اكبر ضلع مشترك بينها جميعها

قد بسطنا في القسم الاول كيفية استخراج العاد الاكبر للكميات البسيطة والتي يسهل حلها الى اضلاعها الاولية . ولكن اذا تعذر ذلك فاننا نعمد الى طريقة مشابهة للطريقة التي استعملناها في الحساب لاستخراج العاد الاكبر بين عددين او اكثر كما ترى في المثالين الآتيين :

مثال ١. ما هو العاد الاكبر لـ ٨ل^{٣} – ٢ل^{٢} – ٥٤ل – ٢٩ و٤ل^{٣} – ٣ل^{٢} – ٢٤ل – ٩

٢	٨ل^{٣} – ٢ل^{٢} – ٥٤ل – ٢٩	٤ل^{٣} – ٣ل^{٢} – ٢٤ل – ٩	ل
	٨ل^{٣} – ٦ل^{٢} – ٤٨ل – ١٨	٤ل^{٣} – ٥ل^{٢} – ٢١ل	
٢	٤ل^{٢} – ٥ ل – ٢١	٢ل^{٢} – ٣ ل – ٩	٢ل
	٤ل^{٢} – ٦ ل – ١٨	٢ل^{٢} – ٦ ل	
	ل – ٣	٣ ل – ٩	٣
		٣ ل – ٩	

فاذاً العاد الاكبر ل – ٣

الشرح: رتبنا كلاً من الكميتين المفروضتين حسب القوة النازلة [او الصاعدة] لحرف ل. وبما ان درجة الحد الاول في كل من الكميتين واحدة فقد جعلنا الكمية التي مسمى حدها الاول اكبر مقسوماً والثانية مقسوماً عليها ورتبنا العمل في خانات او اعمدة متوازية كما هو مبين آنفاً ثم قسمنا ووضعنا خارج القسمة ٢ على يمين المقسوم. وبعد الضرب والطرح وجدنا الباقي ٤ل^{٢} – ٥ ل – ٢١ فجعلناهُ مقسوماً عليهِ والمقسوم عليهِ الاول مقسوماً ووضعنا الخارج ل على يسارهِ فكان الباقي ٢ل^{٢} – ٣ل – ٩. وهلما جعلناهُ مقسوماً عليهِ ووضعنا الخارج ٢ على يمين المقسوم

ثم جعلنا الباقي الاخير ل – ٣ مقسوماً عليهِ واجرينا القسمة فلم يبقَ باقٍ فهو اذاً العاد الاكبر المطلوب

مثال ٢. جد العاد الاكبر لِ ٣ل^{٤} + ١٥ل^{٣} + ٥ل^{٢} + ١٠ل + ٢ و٢ل^{٤} + ٩ل^{٣} + ١٤ل + ٣

	٢ل٤+١٥ل٣+٥ل٢+١٠ل+٢	٢ل٤+٩ل٣+١٤ل+٢
	٢	٢
٢	٦ل٤+٣٠ل٣+١٠ل٢+٣٠ل+٤	٦ل٤+٢٧ل٢+٤٢ل+٩
ل٢	٦ل٤+٢٧ل٢ +٤٢ل+٩	٦ل٤+٢٠ل٢−٤٤ل−١٠
	٢ل٢+١٠ل−٢٢ل−٥	٧ ل٢+٤٤ل٢+٥٢ل+٩
ل٢	٢ل٢+١٥ل٢+٢ل	٢
	−٥ل٢−٢٥ل−٥	٢١ل٢+١٤٣ل٢+١٥٦ل+٢٧
−٥	−٥ل٢−٢٥ل−٥	٢١ل٢+٧٠ل٢−١٥٤ل−٢٥
		٦٣ل٢+٤١٠ل+٦٣
		٦٣ +
		ل٢+٥ل+١

فاذاً العاد الاكبر ل٢ +٥ ل +١

الشرح . رتبنا العمل كما في المثال السابق وبما ان مسميات الحدين الاولين اوليان ولا يمكن قسمتها بدون باقٍ فاجتنابًا لوجود الكسور في الخارج ضربنا المقسوم في ٢ كما رأيت . ثم قسمنا فكان الخارج ٢ كتبناهُ على يمين المقسوم ثم جعلنا المقسوم عليهِ مقسومًا بعد ضربهِ في ٢ . وضربنا الباقي كذلك في ٢ وقسمنا الباقي الثالث على ٦٣ وهذا كله اجتنابًا للكسر في الخارج وجعلنا الخارج ل٢+٥ ل+١ مقسومًا عليهِ وبما انهُ لم يبقَ باقٍ فهو العاد الاكبر المطلوب

١٣٨ . والطريقة المذكورة آنفاً لاستخراج العاد الاكبر تتوقف على المبادىء الآتية :

(١) اذا كان لكمية ضلع ما فهو ضلع معدودها اي اذا كانت د ضلعاً للكمية د م فهي ضلع لـ د م ل

(٢) اذا كان لكميتين ضلع مشترك فانهُ يقسم مجموعها وفضلتها ويقسم ايضاً مجموع وفضلة اي معدود كان من معدوداتها

اي ان د الضلع المشترك بين د م و د ن ضلع مشترك بين د م ± د ن وكذلك ضلع مشترك بين د م ى ± د ن ى

(٣) يجوز ضرب او قسمة احدى الكميتين او اي باقٍ ينتج اثناء العمل في اي عدد كان بشرط ان لا يكون ضلعاً مشتركاً بين الكميتين الاصليتين . ففي المثال الاخير ضربنا في ٢ و ٣ وقسمنا على ٦٣ لان هذه الاعداد ليست ضلعاً مشتركاً بين الكميتين

وشرح هذه الطريقة والتبسُّط فيهِ من خصائص كتب الجبر العالية ولذلك اقتصرنا على ذكرها وشرح طريقة العمل بها

١٣٩ . لاستخراج العاد الاكبر لاكثر من كميتين بهذه الطريقة نجد اولاً العاد الاكبر للكمية الاولى والثانية ثم نجد العاد الاكبر لهذه النتيجة والكمية الثالثة وهكذا الى آخر الكميات المفروضة فالعاد الاكبر الاخير هو المطلوب

١٤٠ . المعدود الاصغر . اذا كانت الكميات المفروضة كبيرة ولا يمكن معرفة اضلاعها الاولية بسهولة فطريقة العمل لاستخراج المعدود الاصغر كما يأتي

نجد العاد الاكبر للكميتين بالطريقة المذكورة آنفاً وبعدها نستخرج الاضلاع الاولية للكلٍ منها بالقسمة على العاد الاكبر. ثم نستخرج المعدود الاصغر للكميتين كما تعلمنا سابقاً وبعدهُ نستخرج المعدود الاصغر بينهُ وبين الكمية الثالثة وهلمّ جرًّا الى آخر الاعداد المفروضة

مثال ١. جد المعدود الاصغر لِ ك٣ + ك٢ − ٢ وك٣ + ٢ ك٢ − ٤

العاد الاكبر لِ ك٣ + ك٢ − ٢ وك٣ + ٢ ك٢ − ٤ هو ك − ١

فاذًا ك٣ + ك٢ − ٢ = (ك − ١)(ك٢ + ٢ ك + ٢)

ك٣ + ٢ ك٢ − ٤ = (ك − ١)(ك٢ + ٢ ك + ٤)

المعدود الاصغر = (ك − ١)(ك٢ + ٢ ك + ٢)(ك٢ + ٢ ك + ٤)

تمرين

جد العاد الاكبر والمعدود الاصغر لما يأتي:

(١) م٣ + ٢ م٢ − ١٣ م + ١٠ وم٣ + م٢ − ١٠ م + ٨

(٢) ل٣ − ٥ ل٢ − ٩٩ ل + ٤٠ ول٣ − ٦ ل٢ − ٨٦ ل + ٤٥

(٣) ى٣ + ٢ ى٢ − ٨ ى − ١٦ وى٣ + ٢ ى٢ − ٨ ى − ٢٤

(٤) م٣ + ٤ م٢ − ٥ م − ٢٠ وم٣ + ٦ م٢ − ٥ م − ٣٠

(٥) ل٣ − ل٢ − ٥ ل − ٣ ول٣ − ٤ ل٢ − ١١ ل − ٦

(٦) $ى^{٦} + ٤ى^{٣} - ٨ى - ٢٤ و ى^{٢} + ٤ى^{٣} - ٤ى - ٩$

(٧) $٢م^{٣} + ٤م^{٢} - ٧م - ١٤ و ٦م^{٢} - ١٠م^{٢} - ٢١م + ٣٥$

(٨) $٣م^{٤} - ٣م^{٣} - ٢م^{٢} - م - ١ و ٩م^{٤} - ٤م^{٢} - م - ١$

(٩) $٢م^{٤} - ٢م^{٣} + م^{٢} + ٣م - ٦ و ٤م^{٤} - ٢م^{٣} + ٣م - ٩$

(١٠) $ل^{٥} - ل^{٣} - ل + ١ و ل^{٧} + ل^{٦} + ل^{٤} - ١$

الفصل التاسع

الكسور

القسم الاول

١٤١. مبادىء الكسور وخاصياتها في الجبر هي كما في الحساب ففي الحساب $\frac{٦}{١٢} = \frac{٢}{٤}$

وهكذا في الجبر $\frac{٥ل^{٢}}{٥ل ن^{٢}} = \frac{ن}{ن^{٢}}$

تحويل الكسور

ب. اختزال الكسور او حطّها

١٤٢. الكسر يكون في ابسط شكلٍ او صورةٍ متى لم يكن في صورته ومخرجه عامل مشترك

ولاجل اختزال الكسر نحلّ الصورة والمخرج الى اضلاعها الاولية ثم نحذف الاضلاع المشتركة بالشطب

مثال ١. اختزل $\frac{١٨ل^{٤}م^{٢}ن}{٢٠ل^{٢}م^{٤}ن^{٢}}$

اقسم كلاً من الصورة والمخرج على الاضلاع المشتركة: $ل^{٢}$، $م^{٢}$، $ن$، فيكون

$$\frac{١٨\,ل^{٤}\,م^{٢}\,ن}{٢٠\,ل^{٢}\,م^{٤}\,ن^{٢}} - \frac{٩\,ل}{١٠\,م\,ن}$$

مثال ٢. اختزل $\dfrac{م^{٢}+٣م+٢}{م^{٢}+م-٢}$

نحلّ الصورة والمخرج الى اضلاعها الاولية فيكون لنا

$$\frac{(م+١)(م+٢)}{(م-١)(م+٢)} - \frac{م+١}{م-١}$$

١٤٣. الاغلاط التي يجب اجتنابها في عملية الاختزال

$$(١)\quad \frac{\text{ك}\,\text{ل}\,\text{م}\,(\text{س}+\text{ت})}{\text{ك}\,\text{ل}\,\text{م}\,(\text{أ}+\text{ت})} = \frac{\text{س}}{\text{أ}}$$

وهذا خطأ محض لانه اذا قسمنا كمية ما على نفسها (ما عدا الصفر) فالخارج ١ . فدفعاً لاجتناب هذا الخطأ نكتب الخارج وهو ١ فوق الضلع المشطوب وتكون النتيجة

$$١ - \frac{١}{١} - \frac{١\times١}{١\times١}$$

$$(٢)\quad \frac{٦}{٧} = \frac{٣+٤}{٧} = \frac{\cancel{٢}+٤}{\cancel{٧}}$$

وهذا خطأ سببه قلة الاهتمام وعدم المبالاة . لانه لا يجوز ان نشطب اضلاع المخرج مقابل حدود الصورة . والواجب يقضي ان نقسم كلاً من الصورة والمخرج على ضلع مشترك . وبكلام آخر نشطب الاضلاع المشتركة في الصورة والمخرج فقط ولا نخلط بين الاضلاع والحدود كما في المثال السابق

تمرين خطي

اجب ما استطعت شفاهاً

اختر ما يأتي

(١) $\frac{٨}{٢٠}$ ، $\frac{٩}{١٢}$ ، $\frac{٤}{٢١}$ ، $\frac{٢١}{٢٤}$ ، $\frac{ب ت}{م ث}$ ، $\frac{ب ك}{ب ى^{٢}}$ ، $\frac{٦ ك}{٨ ك}$

(٢) $\frac{ل م^{٢} ك}{ل م^{٢} ى}$ ، $\frac{٤ ب ى}{٥ ب ص}$ ، $\frac{٦٠ ب ت}{٧ ب ت}$ ، $\frac{٩ ل}{١٢ ل}$ ، $\frac{٤ ى^{٢}}{٧ ى^{٢}}$ ، $\frac{٢ ك ى}{٩ ك^{٢} ى^{٢}}$

(٣) $\frac{٧ ل م^{٢}}{٧ ل^{٢} م}$ ، $\frac{٥ ك^{٢} ى}{١٥ ك ى^{٢}}$ ، $\frac{٦ ل م}{٩ ل ن}$ ، $\frac{٨ م^{٢}}{١٦ م^{٢}}$ ، $\frac{١٢ ل^{٢} م}{١٨ ل^{٢} م^{٢}}$

(٤) $\frac{ك (ب + ت)}{ى (ب + ت)}$ (٥) $\frac{٥ (ل + م)}{٧ (ل + م)}$ (٦) $\frac{٤ (م + ن)}{٨ (م + ن)}$

(٧) $\frac{٤ (ل - م)}{١٢ (ل - م)^{٢}}$ (٨) $\frac{٦ (ل + ن) ك}{٨ (ل + ن) ى}$ (٩) $\frac{٣ (ك + ى)^{٢}}{٩ (ك + ى)}$

(١٠) $\frac{ل ك + م ك}{ل ى + م ى}$ (١١) $\frac{ك^{٢} ى - ك ى^{٢}}{ك^{٢} ى^{٢} + ك^{٢} ى^{٢}}$ (١٢) $\frac{ل^{٢} - م^{٢}}{(ل + م)^{٢}}$

(١٣) $\frac{٨(ل^{٢}-١)}{١٢ل-١٢}$ (١٤) $\frac{٤٥(ك-ى)^{٢}}{١٨(ك-ى)}$ (١٥) $\frac{٩ل^{٢}+٩ل}{٦ل^{٢}-ل}$

(١٦) $\frac{ك-٢}{ك^{٢}-ك-٢}$ (١٧) $\frac{ل+١}{ل^{٢}+٣ل+٢}$

(١٨) $\frac{م-٣}{(م-٣)(م+١)}$ (١٩) $\frac{٤ك+٤ى}{٤مك+٤مى}$

(٢٠) $\frac{ل^{٢}م+ل م^{٢}}{٢ل^{٢}م-٢ل م^{٢}}$ (٢١) $\frac{١٢(ل-٣)(ل+٣)}{٤ل+١٢}$

ضع بدلاً من علامة الاستفهام الصورة المطلوبة في الكسور الآتية:

(٢٢) $\frac{٥}{١٢} = \frac{؟}{٦٠}$ ، $\frac{م^{٢}}{٣ل} = \frac{؟}{١٥ل^{٢}م^{٢}}$ ،

$$\frac{٢}{ل+م} = \frac{؟}{ل^{٢}-م^{٢}}$$

(٢٣) ما قيمة الكسر $\frac{٢+٤}{٨+٤}$ الحقيقية؟ ماذا تصبح قيمة الكسر اذا شطبت ٤ من الصورة والمخرج؟ هل يجوز اذًا ان تشطب ٤؟

(٢٤) اي الكسور يجوز لك ان تشطب ٧ من صورته ومخرجه؟

$$\frac{٧+٥}{١١+٧}\ ,\ \frac{ل+٧}{م+٧}\ ,\ \frac{٧م}{(١+ل)٧}\ ,\ \frac{٧×٥}{١٢+٧}\ ,\ \frac{٧ل}{م+٧}\ ,\ \frac{٧ل م}{٧ن ى}$$

(٣٥) اي الكسور الآتية يجوز لك ان تشطب منها $م^{٢}$؟

$$\frac{م^{٢}+ل}{م^{٢}+ى}\ ,\ \frac{م^{٢}ل}{م^{٢}ى}\ ,\ \frac{م^{٢}-٥}{٢م^{٢}+٥}\ ,\ \frac{م^{٢}ل^{٢}}{م^{٢}+ل^{٢}}\ ,\ \frac{م^{٢}ل^{٢}}{م^{٢}ى^{٤}}$$

٣. تحويل الكسر الغير الحقيقي الى صحيح او كمية ممتزجة

١٤٤. الكسر الحقيقي هو ما كانت درجة صورته اقل من درجة مخرجه نحو $\frac{م^{٢}-١}{م^{٢}+١}$

١٤٥. الكسر الغير الحقيقي هو ما كانت درجة صورته مساوية لدرجة مخرجه او اكبر منها نحو $\frac{م^{٢}-١}{م^{٢}+١}$ و $\frac{م^{٣}-١}{م^{٢}+١}$

وبما ان الكسر عبارة عن قسمة عدد على آخر فلاجل تحويل الكسر الغير الحقيقي الى صحيح او كمية ممتزجة نقسم الصورة على المخرج واذا بقي باقٍ فاننا نضعه فوق المخرج

مثال ١. $\frac{م ل+ن}{ل} = م + \frac{ن}{ل} = م\frac{ن}{ل}$

مثال ٢. $\frac{ل^{٢}+م^{٢}}{ل+م} = ل-م+\frac{٢م^{٢}}{ل+م}$

لا تنسَ ان خط الكسر حاصر. وعليهِ اذا كانت علامة الحدّ الاول من الباقي "–" وسبقت الخط فانهُ يجب تغيير علامات سائر الحدود قبل وضعها فوق المخرج

مثال ٢ . $\frac{٧ل^{٢}م^{٢}+١٤ل م-ل-م}{٧ل م} - \frac{ل م+٢}{٧ل م} - \frac{ل+م}{٧ل م}$

تمرين

اجب ما استطعت شفاهاً

حوّل الكسور الآتية الى صحيح او الى كميات ممتزجة :

(١) $\frac{١}{٢}$, $\frac{٢٣}{٥}$, $\frac{١٢١}{٩}$, $\frac{٧٥}{١٥}$, $\frac{١٨٢}{١٧}$, $\frac{٩٣}{١٩}$

(٢) $\frac{م^{٢}}{م}$, $\frac{٨ل^{٢}}{٢ل}$, $\frac{م^{٢}ل^{٢}ى^{٤}}{م^{٢}ل^{٢}ى^{٢}}$, $\frac{م ى+ل}{ى}$, $\frac{م ى-ل}{ى}$

(٣) $\frac{ك^{٢}+ل م}{ك}$, $\frac{٦م^{٢}-٧ل}{٣م^{٢}}$, $\frac{م^{٢}+٣}{م^{٢}}$, $\frac{ل^{٤}+٥}{ل^{٢}}$

(٤) $\frac{١٠م^{٢}+٨}{٥م}$, $\frac{٢٠ل+٤}{٤ل}$, $\frac{٣ل م ن-٩}{٣ل ن}$

(٥) $\frac{٢م^{٢}-٦م^{٢}}{٢م}$, $\frac{٤ل^{٢}-٤ل^{٢}+ل}{٢ل^{٢}}$

(٦) $\frac{ك^٢-ى^٢}{ك-ى}$ ، $\frac{ك^٢-ى^٢}{ى+ك}$ ، $\frac{ك^٢-ى^٢}{ك-ى}$ ، $\frac{ك^٢-ى^٢}{ك+ى}$

(٧) $\frac{ك^٢+ى^٢}{ك+ى}$ ، $\frac{ك^٢+ى^٢}{ك-ى}$ ، $\frac{٢ل^٢+ل-١٧}{ل}$

(٨) $\frac{م^٢-١٥م+٥٦}{م-٨}$ (٩) $\frac{ل^٢-١٢ل م+٤م^٢}{ل-م}$

٣. تحويل الصحيح او الكمية المتزجة الى كسر

١٤٧. يحوّل الصحيح او الكسر المتزج الى كسر غير حقيقي بضرب الصحيح في مخرج الكسر واضافة الصورة الى الحاصل ووضع المجموع فوق المخرج

مثال ١. $٤\frac{٢}{٥} = \frac{٤\times٥+٢}{٥} = \frac{٢٠+٢}{٥} = \frac{٢٢}{٥}$

مثال ٢. $م-١ = \frac{٢}{م+١}$ ؛ $\because (م-١)(م+١)=م^٢-١$

$م^٢-١+(-٢)=م^٢-٣$

$\therefore م-١ = \frac{٢}{م+١} = \frac{م^٢-٣}{م+١}$

تمرين

اجب ما استطعت شفاهاً

حوّل ما يأتي الى كسر غير حقيقي :

(١) $١\frac{١}{٢}$, $٢\frac{٢}{٨}$, $٩\frac{١}{٦}$, $٣\frac{٥}{٧}$, $١٢\frac{٢}{٨}$, $١٢\frac{٣}{١٢}$

(٢) $٢+\frac{ك}{٢}$, $٥+\frac{٢}{م}$, $ك+\frac{ى}{ك}$, $ك-\frac{ى}{ك}$

(٣) $\frac{٤ك}{ى}+٧$, $-٥\frac{٩ل}{ى}$, $٧+\frac{١٠}{٢م}$, $١-\frac{٥ك^{٢}}{٦ل^{٢}}$

(٤) $ل+م+\frac{٢م}{ل-م}$ (٥) $ل-م-\frac{ل}{ل+م}$

(٦) $ك+١+\frac{١}{ك-١}$ (٧) $ل-م+\frac{٢م}{ل+م}$

(٨) $٢ل-م-\frac{٩ل^{٢}-٢٢م}{٣ل+م}$ (٩) $ك+ى+\frac{ك^{٢}+ى^{٢}}{ك-ى}$

(١٠) $ك-ى-\frac{ك^{٢}+ى^{٢}}{ك+ى}$ (١١) $ب-٣ث-\frac{٤ث}{ب+٣ث}$

(١٢) $ل^{٢}+ل م+م^{٢}-\frac{ل^{٣}}{ل-م}$ (١٣) $\frac{ل}{ل-م}-١$

(١٤) $ل^{٢}-ل م+م^{٢}-\frac{٢م^{٣}}{ل+م}$ (١٥) $\frac{٢م^{٢}+٢م-١}{م+١}+م+١$

٤. التحويل الى مخرج اصغر مشترك (التجنيس)

١٤٧ . الكسور التي لها ذات المخرج يقال لها كسور متجانسة مثل $\frac{٢}{٤}$ و $\frac{١}{٤}$ ؛ $\frac{ك}{ى}$ و $\frac{٥}{ى}$ و $\frac{ل+م}{ى}$

١٤٩. تحوّل الكسور الى مخرج اصغر مشترك باستخراج المعدود الاصغر لجميع المخارج ثم تقسم هذا المعدود الاصغر على كل مخرج بالتتابع وتضرب حدّي الكسر (صورتهُ ومخرجهُ) في خارج قسمة المعدود الاصغر على مخرج الكسر وهاك بيان العمل :

(١) حوّل $\frac{٢ل^{٢}م}{٢ك^{٢}ى}$ و $\frac{٣ل^{٢}ر}{٢ك ى^{٢}}$ الى المخرج الاصغر المشترك

المخرج الاصغر المشترك $= ٦ك^{٢}ى^{٢}$. اقسم $٦ك^{٢}ى^{٢}$ على $٢ك^{٢}ى - ٢ك ى$. اضرب صورة ومخرج $\frac{٢ل^{٢}م}{٢ك^{٢}ى}$ في $٢ى - ٢ك$ بنتج $\frac{٤ل^{٢}م ى}{٦ك^{٢}ى^{٢}}$. ثم اقسم $٦ك^{٢}ى^{٢}$ على $٢ك ى^{٢} - ٢ك$. اضرب صورة ومخرج $\frac{٣ل^{٢}ر}{٢ك ى^{٢}}$ في $٣ك$ بنتج $\frac{٩ل^{٢}ر ك}{٦ك^{٢}ى^{٢}}$

مثال ٢ . حوّل $\frac{ك - ي}{ك^{٢} + ٢ك ى + ٢ى^{٢}}$ و $\frac{ك}{٢ك^{٢} + ٢ك ى + ى^{٢}}$

حلّ المخارج الى اضلاعها وجد معدودها الاصغر الذي هو $(ك + ى)(٢ك + ٢ى)$

$$\therefore \frac{ك - ى}{ك^{٢} + ٢ك ى + ٢ى^{٢}} - \frac{(ك - ى)(٢ك + ى)}{(ك + ى)(ك + ٢ى)(٢ك + ى)}$$

و

$$\frac{ك}{٢ك^{٢} + ٢ك ى + ى^{٢}} - \frac{ك(ك + ٢ى)}{(ك + ى)(ك + ٢ى)(٢ك + ى)}$$

اطلب من التلميذ ان يقدّم الشرح الكافي لحلّ العمل

مثال ٣. حوّل $\frac{ل}{ل - م}$ و $\frac{م}{م - ل}$ الى المخرج الاصغر المشترك

يتبادر الى ذهن الطالب عند روْيتهِ هذا السؤال (وما شابههُ) لاول مرة ان المخرجين مختلفين والحقيقة غير ذلك . لان $\frac{م}{م - ل} = \frac{-م}{ل - م}$ وكذلك $\frac{ل}{ل - م} = \frac{-ل}{ل - م}$.

فاذا اتخذنا ل – م مخرجاً كان الجواب $\frac{\text{ل}}{\text{ل}-\text{م}}$ و $\frac{-\text{م}}{\text{ل}-\text{م}}$ واذا اتخذنا م – ل مخرجاً كان الجواب $\frac{-\text{ل}}{\text{م}-\text{ل}}$ و $\frac{\text{م}}{\text{م}-\text{ل}}$. فعلى الطالب ان ينتبه الى هذا الامر لانه يسهّل العمل ويوفّر الوقت

تمرين كتابي

اجب ما استطعت شفاهاً

حوّل الكسور الآتية الى المخرج الاصغر المشترك :

(١) $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{4}$ و $\frac{1}{6}$ ؛ $\frac{1}{4}$ و $\frac{1}{5}$ و $\frac{1}{8}$ ؛ $\frac{\text{ل}}{8}$ و $\frac{\text{ل}}{10}$ و $\frac{\text{ن}}{16}$

(٢) $\frac{1}{\text{ل}}$ و $\frac{2}{\text{م}}$ ؛ $\frac{7}{\text{م}}$ و $\frac{8}{\text{ن}}$ ؛ $\frac{9}{\text{ك}^2}$ و $\frac{4}{\text{ك}}$

(٣) $\frac{6}{\text{ل}^2}$ و $\frac{7}{\text{م}^2}$ ؛ $\frac{2}{\text{ل}}$ و $\frac{4}{\text{م}}$ و $\frac{6}{\text{ن}}$ ؛ $\frac{2}{\text{م}^2\text{ن}}$ و $\frac{3}{\text{ل}\text{م}\text{ن}^2}$

(٤) $\frac{\text{ك}}{\text{ك}+\text{ى}}$ و $\frac{\text{ى}}{\text{ك}-\text{ى}}$ (٥) $\frac{3}{\text{ل}+2}$ و $\frac{4}{2\text{ل}+6}$

(٦) $\frac{\text{ب}}{\text{ك}^2\text{ى}}$ و $\frac{\text{ث}}{\text{ك}\text{ى}^2}$ (٧) $\frac{4}{\text{ل}+1}$ و $\frac{5}{\text{ل}-1}$

(٨) $\frac{3\text{م}}{\text{ك}^2-\text{ى}^2}$ و $\frac{4}{\text{ك}+\text{ى}}$ (٩) $\frac{2\text{ل}}{\text{ل}+2}$ و $\frac{5}{\text{ل}^2+5\text{ل}+6}$

(١٠) $\frac{٢ل}{ل^{٢}-ل م}$ و $\frac{م^{٢}}{ل^{٢}-٢ل م+م^{٢}}$ (١١) $\frac{ل+م}{م-ل}$

و $\frac{ل-م}{ل+م}$ (١٢) $\frac{ا}{ل^{٢}-ى^{٢}}$ و $\frac{ا}{ى-ل}$ (١٣) $\frac{ب}{م+ن}$

و $\frac{ت}{م^{٢}-ن^{٢}}$ (١٤) $\frac{٣}{٤ل^{٢}-ا}$ و $\frac{٢}{٦ل+٣}$ (١٥) $\frac{ا}{م^{٢}-م}$

و $\frac{٣}{م-ا}$ (١٦) $\frac{ل}{ا+ل}$ و $\frac{ا}{ل}$ و $\frac{ا}{ل+ل^{٢}}$ (١٧) $\frac{ا+م}{٢-٣م}$

و $\frac{ا-م}{٣+٣م}$ (١٨) $\frac{٣}{ل^{٢}م+ل م^{٢}}$ و $\frac{٤}{ل^{٢}م-ل م^{٢}}$

(١٩) $\frac{م+٣}{م-٣}$ و $\frac{م^{٢}+٩}{م^{٢}-٩}$ و $\frac{م-٣}{م+٣}$

(٢٠) $\frac{٢}{ل-ل^{٢}}$ و $\frac{ل}{٣+٣ل}$ و $\frac{ل}{٢-٢ل}$

جمع الكسور وطرحها

١٥٠. لجمع الكسور او طرحها نتبع الاسلوب الآتي :

١. تحويل الكسور الى كسور مساوية لها في القيمة وتكون مخارجها المخرج الاصغر المشترك

٢. تجمع الصور وتكتب فوق المخرج الاصغر المشترك . ويجب تغيير علامات حدود صورة الكسر الذي يكون مسبوقاً بالاً عند نزع خطه وجعله مع غيره فوق خط واحد

٣. اخيراً نصلح وتختزل الكسر

مثال ١. $\frac{٣ع}{٥ل^{٢}} + \frac{٤}{٥ل م} - \frac{٧ى}{١٥م^{٢}}$

$= \frac{٩ع م^{٢} + ١٢ ل م - ٧ل^{٢} ى}{١٥ ل^{٢} م^{٢}}$ وهو الجواب

مثال ٢. $\frac{ل^{٢}}{ل^{٢} - ١} + \frac{ل}{ل + ١} + \frac{ل}{ل - ١}$

$= \frac{ل^{٢} + ل(ل - ١) + ل(ل + ١)}{ل^{٢} - ١}$

$= \frac{ل^{٢} + ل^{٢} - ل + ل^{٢} + ل}{ل^{٢}} = \frac{٣ل^{٢}}{ل^{٢} - ١}$

مثال ٣. $\frac{٥ل - ٤م}{٦} - \frac{٧ل - ٣م}{١٤}$

$= \frac{٧(٥ل - ٤م) - ٣(٧ل - ٣م)}{٤٢}$

$= \frac{٣٥ل - ٢٨م - ٢١ل + ٦م}{٤٢} = \frac{١٤ل - ٢٢م}{٤٢}$

$= \frac{٢(٧ل - ١١م)}{٤٢} = \frac{٧ل - ١١م}{٢١}$

تمرين كتابي

اجب ما استطعت شفاهًا

ابسط ما يأتي :

(١) $\frac{١}{٢} + \frac{٣}{٤}$; $\frac{٣}{٦} + \frac{٢}{٣}$; $\frac{١}{٢} - \frac{١}{٨}$; $\frac{٣}{٥} - \frac{٧}{١٠}$

(٢) $\frac{ل}{٢} + \frac{ل}{٤}$; $\frac{م}{٢} - \frac{م}{٦}$; $\frac{٣ن}{٤} - \frac{ن}{٢}$; $\frac{١}{٤٢} - \frac{١}{٤٦}$

(٣) $\frac{ى}{٢} + \frac{ى}{٦}$; $\frac{٣ك}{٢} + \frac{٣ك}{٥}$; $\frac{ك}{٢} - \frac{ك}{١٣}$

(٤) $\frac{١}{م} + \frac{١}{ن}$; $\frac{١}{م} - \frac{١}{ن}$; $\frac{ل + م}{٢} + \frac{ل - م}{٢}$

(٥) $\frac{م + ن}{٢} - \frac{م - ن}{٢}$; $\frac{٢٢}{٢} - \frac{م + ن}{٢}$

(٦) $\frac{م + ن}{٧} - \frac{ن}{٧}$; $\frac{٢٢ + ن}{٥} - \frac{٢٢ - ن}{٥}$

(٧) $\frac{١}{م-٢} - \frac{٢}{م-١}$ (٨) $\frac{١}{١-ك} - \frac{١}{ك-١}$

(٩) $\frac{١}{ك+٣} + \frac{١}{ك+٤}$ (١٠) $\frac{١}{ك+٥} - \frac{١}{ك-٥}$

(١١) $\frac{م-١}{م^{٢}-٤} + \frac{م+٢}{م-٢}$ (١٢) $\frac{٣}{ل} + \frac{-٢}{ل} - \frac{١}{-ل}$

(١٣) $\frac{ك}{ك+ى} + \frac{ك}{ك-ى}$ (١٤) $\frac{ل}{ل-ن} - \frac{ن}{ل+ن}$

(١٥) $\frac{١}{م-ن} - \frac{م}{م^{٢}-ن^{٢}}$ (١٦) $\frac{ك-ى}{ك+ى} - \frac{ك+ى}{ك-ى}$

(١٧) $\frac{ن-٢}{ن-٣} - \frac{ن+٢}{ن+٣}$ (١٨) $\frac{ك-٢}{(ك+٥)^{٢}} - \frac{ك+٢}{ك^{٢}-٢٥}$

(١٩) $\frac{ل+٥}{ل^{٢}-ل-٦} + \frac{ل+٣}{ل^{٢}+٧ل+١٠}$ (٢٠) $\frac{٣ل+م}{٣ل-م} - \frac{٩ل^{٢}+م^{٢}}{٩ل^{٢}-م^{٢}}$

(٢١) $\frac{ل+٤}{ل^{٢}-٣ل} - \frac{ل+٦}{ل^{٢}-ل-٦}$ (٢٢) $\frac{٣}{٤م^{٢}-٩} - \frac{٢}{٦م^{٢}-٩م}$

(٢٣) $\frac{ك}{ك^{٢}-٦ك+٨} - \frac{ك}{ك^{٢}-١٦}$ (٢٤) $\frac{ل+م}{٢ل+٦م} - \frac{ل-م}{٣ل+٩م}$

(٢٥) $\frac{٦}{ى^٢-٢٥} - \frac{٢}{٥-ى}$ (٢٦) $\frac{٢ل-١}{٢-ل} + \frac{٢ل}{ل^٢-٤}$

(٢٧) $\frac{٢ى}{٩-ى^٢} - \frac{٤ى-٢}{ى-٣}$ (٢٨) $\frac{ل-١}{٢-ل} + \frac{ل^٢-٣}{ل^٢-٤}$

ضرب الكسور

١٥١. ضرب الكسور في الجبر كما في الحساب اي تضرب الصور بعضها في بعض والمخارج بعضها في بعض وتجعل الحاصل الاول صورة والثاني مخرجاً ولا تنسَ ان تحذف جميع الاضلاع المشتركة قبل الضرب

مثال ١. $\frac{٥ل}{٢م} \times \frac{٢م^٢}{١٠ل^٢}$

$$\frac{\cancel{٥}\,ل}{\cancel{٢}\,م} \times \frac{\cancel{٢}\,م^{\cancel{٢}}}{\cancel{١٠}\,ل^{\cancel{٢}}} = \frac{م}{٤ل}$$

مثال ٢. $\frac{ل+م}{ل} \times \frac{ل^٢-م^٢}{ل^٢+ل م^٢} \times \frac{٤ل^٢}{(ل+م)^٢}$

$$= \frac{\cancel{ل+م}}{ل} \times \frac{(\cancel{ل+م})(ل-م)}{ل(ل^٢+م^٢)} \times \frac{٤ل^{\cancel{٢}}}{(\cancel{ل+م})(\cancel{ل+م})} = \frac{٤(ل-م)}{ل^٢+م^٢}$$

تمرين كتابي

اجب ما استطعت شفاهًا

اضرب ما يأتي

(١) $٢\times٢\frac{1}{٢}$; $٣\times٣\frac{1}{٣}$; $٤\times٤\frac{1}{٤}$; $٧\times٧\frac{1}{٧}$; $٦\times٦\frac{1}{٦}$

(٢) $٢\times\frac{ل}{م}$; $٥\times\frac{م}{ن}$; $٦\times\frac{٥ك}{٧ى}$; $\frac{ل}{٤}\times\frac{٦}{٧}$

(٣) $\frac{ت}{ح}\cdot\frac{ل}{د}$; $\frac{٩}{ك^{٢}}\cdot\frac{ك}{١٢}$; $\frac{كى}{ل م}\cdot\frac{ل}{ى}$; $\frac{٢ل}{٤م}\cdot\frac{٢م}{٥ل}$

(٤) $\frac{ل+م}{٣٠}\times١٥$; $\frac{ل-م}{٧}\times\frac{٣}{ل-م}$; $\frac{ك^{٢}-ى^{٢}}{٩}\times\frac{٩}{ك-ى}$

(٥) $\frac{٢ل}{٣ب}\cdot\frac{٦ب}{٧م}$; $\frac{٥م}{٤ل}\cdot\frac{٢ك^{٢}ى^{٢}}{٣ك^{٢}}$; $\frac{٣كى}{ى^{٢}}$

(٦) $\frac{٤ل^{٢}م}{٥ك^{٢}}\cdot\frac{١٥ك^{٢}ى}{٤ل^{٢}م}$; $\frac{٥ل^{٢}}{٤م ن}\cdot\frac{٦م ن}{١٠ل^{٢}م ن}$

(٧) $\frac{ل+م}{٢ل}\cdot\frac{٣ل^{٢}}{(ل+م)^{٢}}$ (٨) $\frac{م^{٢}-ن^{٢}}{٤م^{٢}}\cdot\frac{٥م^{٢}}{(م+ن)^{٢}}$

(٩) $\frac{٦م+١٢}{٤م+٨} \cdot \frac{٥م-١٥}{٣م-٩}$ (١٠) $\frac{ل ك+ل ى}{د ك-د ى} \cdot \frac{م ك-م ى}{ع ك+ع ى}$

(١١) $\frac{(م-ن)^{٣}}{م+ن} \cdot \frac{(م+ن)^{٢}}{(م-ن)^{٤}}$ (١٢) $\frac{ل^{٢}-٩}{ل^{٢}+ل} \cdot \frac{ل^{٢}-١}{ل-٣}$

(١٣) $\frac{م^{٢}-١٢١}{م^{٢}-٤} \cdot \frac{م+٣}{م+١١}$ (١٤) $\frac{٣م^{٢}+م}{٣م-٢} \cdot \frac{م-١}{٣م+٦م^{٢}}$

(١٥) $\frac{٤م^{٢}-٩}{٩م^{٢}-١} \times \frac{٦م+٣}{١٢م-١٨}$ (١٦) $\frac{(ن-١)^{٢}}{ن(م+١)} \cdot \frac{م+١}{(ن-١)^{٢}}$

(١٧) $\frac{ك+ى}{ك-ى} \cdot \frac{ك^{٢}-ى^{٢}}{ك^{٢}+٢ى^{٢}}$ (١٨) $\frac{ل^{٢}-م^{٢}}{ل^{٢}+م^{٢}} \cdot \frac{٢ل}{٣(ل+م)}$

(١٩) $\frac{م^{٢}-٩}{م^{٢}-٦م+٩} \cdot \frac{م-٣}{م+٣}$ (٢٠) $\frac{٣ل-٣م}{ل^{٢}+٢ل م+م^{٢}} \cdot \frac{٧ل+٧م}{٢(ل^{٢}-م^{٢})}$

(٢١) $\frac{(ل+م)^{٢}}{ل-م} \cdot \frac{ل^{٢}-م^{٢}}{ل^{٢}+م^{٢}}$ (٢٢) $\frac{م^{٢}-١٦}{(م-٣)^{٢}} \cdot \frac{م^{٢}-٧م+١٠}{م^{٢}-٩م+٢٠}$

(٢٣) $\frac{٣ى-١٥}{٢ى+٨} \cdot \frac{ى^{٢}+٩ى+٨}{ى^{٢}+٣ى-٤٠}$

قسمة الكسور

١٥٢ . مكفوء الكمية هو الخارج من قسمة واحدٍ على تلك الكمية [ويقال له ايضاً مقلوب الكمية] فمكفوء م هو $\frac{١}{م}$ ومكفوء ٧ هو $\frac{١}{٧}$ ومكفوء $\frac{٤}{٣}$ هو $\frac{٣}{٤}$ وهلم جرًّا

١٥٣ . لقسمة كسر على كمية صحيحة او على كسر فاننا نقلب المقسوم عليه ونضربه في المقسوم . اي ان القسمة كالضرب لو وضعنا بدلاً من المقسوم عليه مقلوبه

مثال ١ . $\frac{ل}{م} \div \frac{ك}{ى} = \frac{ل}{م} \times \frac{ى}{ك} = \frac{ل ى}{م ك}$

مثال ٢ . $\frac{ل^٢ - م^٢}{ل^٢ + ٢ ل م + م^٢} \div \frac{ل - م}{ل^٢ + ل م} = \frac{(ل - م)(ل + م)}{(ل + م)^٢} \times$

$\frac{ل (ل + م)}{ل - م}$ وبحذف الاضلاع المشتركة يكون الجواب ل

تمرين كتابي

اجب ما استعت شفاهًا

(١) $٥ \div \frac{٣}{٤}$; $٥ \div \frac{٢}{٤}$; $\frac{٢}{٤} \div \frac{٥}{٨}$; $\frac{٢}{٤} \div ٥$; $\frac{٣}{٤} \div ٥$

(٢) $٢ \div \frac{ل}{٤}$; $٢ \div \frac{ل}{٢}$; $٢ \div \frac{ل}{م}$; $٢ \div ٢$; $\frac{م}{ل} \div ٢$

(٣) $\frac{م}{٢} \div \frac{١}{٥}$; $\frac{٢}{٤} \div \frac{٢}{٣}$; $\frac{١}{٢} \div \frac{١}{٤}$; $\frac{ل}{م} \div \frac{٢}{٣}$

(٤) $\frac{٤}{ن^{٢}} + \frac{ن}{م^{٢}}$; $\frac{ن}{م^{٢}} + \frac{م}{ل^{٢}}$; $\frac{م}{ل^{٢}} + \frac{ل}{ن^{٢}}$

(٥) $\frac{ل}{م^{٢}} + \frac{م}{ن^{٢}}$; $\frac{م}{ن^{٢}} + \frac{ن}{ل^{٢}}$; $\frac{ن}{ل^{٢}} + \frac{ل}{م^{٢}}$

(٦) $\frac{ل+م}{ك} + \frac{ل-م}{ك}$ (٧) $\frac{ك+ى}{٢م} + \frac{ك-ى}{٢م}$

(٨) $\frac{ك+ى}{ل+م} + \frac{ك-ى}{ل+م}$ (٩) $\frac{ك+ى}{ل-م} + \frac{ك-ى}{ل-م}$

(١٠) $\frac{ك+١}{ل^{٢}-١} + \frac{ك+١}{ل-١}$ (١١) $\frac{م^{٢}+٢م+١}{٢ل ن} + \frac{م^{٢}-١}{٦ل ن^{٢}}$

(١٢) $\frac{م^{٢}-١}{٤} + \frac{م-١}{م+٢}$ (١٣) $\frac{ل^{٢}-ل م^{٢}}{م^{٢}} + \frac{ل^{٢}-م^{٢}}{ل م}$

(١٤) $\frac{ك^{٢}-ى^{٢}}{١٠ل م} + \frac{ك^{٢}-ك ى}{٥م^{٢}}$ (١٥) $\frac{م^{٢}-م-٢}{م^{٢}-ن^{٢}} + \frac{م^{٢}-١}{م(م+ن)}$

(١٦) $\frac{ل^{٢}+م^{٢}}{ل+م} + \frac{ل^{٤}-م^{٤}}{ل^{٢}-٢ل م+م^{٢}}$ (١٧) $\frac{ك^{٤}-ى^{٤}}{ك} + \frac{ك^{٢}+ى^{٢}}{ى}$

(١٨) $\frac{ل^{٢}+٩}{ل^{٢}-٩} + \frac{(ل+٣)^{٢}}{ل-٣}$ (١٩) $\frac{ل^{٢}-م^{٢}}{ل^{٢}-٤م^{٢}} + \frac{م^{٢}+ل م}{٢ل م+ل^{٢}}$

(٣٠) $\frac{ل^٢ - م^٢}{م^٢ - ٤م - ٤} + \frac{ل - م}{م^٢ - م}$ (٣١) $\frac{ل + ٥}{ل + ٤} + \frac{٣٥ - ل^٢}{١٦ - ل^٢}$

(٣٢) $\frac{م^٢ + ٤م - ١٠}{م^٢ + ٣م - ٣} + \frac{م^٢ - ٩م + ١٤}{م^٢ + ٧م + ١٢}$

تمرين عام

(١) اختزل $\frac{٣ل^٢م + ٦ل م^٢}{٩ل^٢ + ٢٦ل م + ٢٦م^٢}$

(٢) حوّل الى صحيح وكسر $\frac{ل^٢ + ٣ل م - ن}{ل}$

(٣) حوّل الى كسر غير حقيقي $ى^٢ + ٢ى - ٣ + \frac{٧}{ى}$

ابسط ما يأتي:

(٤) $\frac{٧}{٣ل - ٣} - \frac{٥}{٢ل - ٢}$ (٥) $\frac{م^٣ - ٩م}{م^٢ن + ٤م ن} + \frac{م^٢ن^٢ - ٣م ن^٣}{م^٢ - ١٦}$

(٦) $\frac{٣ل^٤}{١٠م^٤} \cdot \frac{١٥م^٦}{٧ن} + \frac{٩م^٢}{٢٨ن^٣}$ (٧) $\frac{٣ل م^٢}{ك + ى} \cdot \frac{ك^٢ - ى^٢}{٦ل^٢م}$

(٨) $\frac{ل^٢ - ١}{١٤م} + \frac{(ل - ١)^٢}{٧م^٢}$ (٩) $\frac{٣}{ل + م} - \frac{٣م + ل}{ل^٢ - م^٢}$

١٠) $\frac{ل}{م(م+١)} + \frac{ل}{م(م-١)}$ (١١) $\frac{ك^٢-ى^٢}{٩} + \frac{ك-ى}{٣}$

١٢) $\frac{ل+م}{ل^٢-٣ل م} + \frac{ل-م}{ل م-٣م^٢}$ (١٣) $\frac{ك^٢-ى^٢}{ك^٢} \cdot \frac{ك^٢}{(ك-ى)^٢}$

١٤) $\frac{٣ل}{ل+٣م} - \frac{ل}{ل-٣م} + \frac{٨ل م}{ل^٢-٤م^٢}$ (١٥) $(ل+١-\frac{٣٠}{ل}) +$

$(ل-٤-\frac{٥}{ل})$ (١٦) $\frac{ل^٢-٢ل م+م^٢}{ل^٢+٢ل م+م^٢} + \frac{ل^٢-م^٢}{٢ل+٣م}$

١٧) $\frac{ك^٢+٤ك ى+٤ى^٢}{٩-ك^٢} \cdot \frac{ك^٢-٥ك+٦}{ك^٢-٤ى^٢}$

تمرين موقت

الوقت : ٥ دقائق

انقل واختزل ما يأتي :

١) $\frac{١٤ل}{٧}$ (٢) $\frac{٩ك^٢}{٣ك^٢}$ (٣) $\frac{-٦ل^٢م}{٣ل^٢}$ (٤) $\frac{ل م}{م ن^٢}$

٥) $\frac{ل م^٢ن}{ل م^٢ع}$ (٦) $\frac{٥ل^٥م^٢}{٥ل^٥م^٤}$ (٧) $\frac{١٥م^٤ن^٢}{٣٠م^٥ن^٣}$ (٨) $\frac{ل(ك+ى)}{م(ك+ى)}$

(٩) $\frac{ل م + ن م}{ل ع + ن ع}$ (١٠) $\frac{ك^٢ - ى^٢}{ك - ى}$ (١١) $\frac{ك + ى}{ك^٢ - ى^٢}$

(١٢) $\frac{٢(ل^٢ - ٩)}{٦(ل - ٣)^٢}$ (١٣) $\frac{ل - ١}{(ل - ١)(ل + ٢)}$ (١٤) $\frac{م + ٢}{م^٢ + ٥م + ٦}$

(١٥) $\frac{١٠(م - ٢)(م + ٢)}{٥م + ١٠}$ (١٦) $\frac{ل^٢ - ٤}{ل^٢ + ٤ل - ١٢}$

(١٧) $\frac{ل_{ن+١} \, ع^{ن+٢}}{ل_{ن} \, م \, ع^{ن+٢ ن+١}}$ (١٨) $\frac{ك^٤ - ى^٤}{ك^٢ + ٢ك ى + ى^٢}$

متوسط الاصابات ١٥

تمرين موقت

الوقت : ١٩ دقيقة

انقل وابسط ما يأتي :

(١) $\frac{ك}{ى} + \frac{م}{ن}$ (٢) $\frac{ك}{م} + \frac{ى}{ن}$ (٣) $\frac{ل}{م} + \frac{ن}{ع}$ (٤) $\frac{ك}{ى} - \frac{م}{ن}$

(٥) $\frac{ل}{م} - \frac{م}{٢ل}$ (٦) $\frac{٤ك}{ى} - \frac{٤ى}{ك}$ (٧) $م \cdot \frac{ك}{ى}$ (٨) $\frac{ك}{ى^{-ن}} \cdot م$

(٩) $\frac{ك+١}{ى+١} \cdot \frac{م+١}{ن+١}$ (١٠) $\frac{ك+١}{ى^{٢}} \cdot \frac{ى}{(ك+١)^{٢}}$

(١١) $(ل+م) \div \frac{م+ن}{ن+ع}$ (١٢) $\frac{ن+ع}{ن-ع} \div (ل+م)$

(١٣) $\frac{ل+م}{ل-م} \div \frac{ك+ى}{ك-ى}$ (١٤) $\frac{ل+م}{ل-م} + \frac{ل-م}{ل+م}$

(١٥) $\frac{ل+م}{ل-م} - \frac{ل-م}{ل+م}$ (١٦) $\frac{ل^{٢}م^{٢}}{ل^{٢}+م^{٢}} + \frac{ل^{٢}م^{٢}}{ل^{٢}-م^{٢}}$

(١٧) $\frac{٢ل-٣}{٢ل+٣} - \frac{١-٢ل}{١+٢ل}$ (١٨) $\frac{١}{م+١} + \frac{٢}{م+٢}$

(١٩) $\frac{١}{م+٢} - \frac{٢}{م+١}$ (٢٠) $\frac{٢ل}{ل+م} \cdot \frac{ل^{٢}-م^{٢}}{ل^{٢}+م^{٢}}$

(٢١) $\frac{ل-م}{ل^{٢}+م^{٢}} \cdot \frac{ل^{٤}-م^{٤}}{(ل-م)^{٢}}$ (٢٢) $\frac{م^{٢}-٤}{م-٣} \cdot \frac{م^{٢}-٥م+٦}{م^{٢}-م-٢}$

(٢٣) $\frac{٢}{٢ل+٢م} + \frac{ل^{٢}+م^{٢}}{ل^{٢}-م^{٢}}$ (٢٤) $\frac{١-ل^{٢}}{١+ل^{٢}} + \frac{(١+ل)^{٢}}{(١+ل)^{٢}}$

(٣٥) $\frac{ل^٢ - ٢ل م + م^٢}{ل^٢ + ٢ل م + م^٢} + \frac{ل - م}{ل + م}$ (٣٦) $\frac{ل^٤ - م^٤}{ك^٤ - ى^٤} + \frac{(ل+م)(ل-م)}{(ك+ى)(ك-ى)}$

متوسط الاصابات ٢٠

تمرين شفهي

(١) عبّر عن قسمة ٩ على ١٣ ؛ ل على ١٣ ؛ ل على م ؛ ل + ٧ على ٢ ل − ١

(٢) اذا كان ثمن البطيخة ٣ غروش فكم بطيخة تشتري بـ ١٥ غرشاً ؟ بـ غ غرشاً ؟ بـ ل + م غرشاً ؟

(٣) اذا كان ثمن الكرسي غ غرشاً فكم كرسيًّا تشتري بـ ٤٥٠ غرشاً ؟ بـ ل غرشاً ؟ بـ ل + م غرشاً ؟

(٤) اذا كان ثمن فدان الارض ل ليرة فكم يكون ثمن ٣/٤ الفدان ؟ ٣/٤ الفدان ؟ ٥/٤ الفدان ؟

(٥) اذا كان الحرف ع يمثل عددًا ما فماذا يكون ثلثه وربعه ؟

(٦) اجرة عامل ل ليرة في ى يومًا فكم تكون اجرته في اليوم ؟

(٧) اذا كان معدل نفقة السيارة غ غرشاً في الميل الواحد فكم تكون نفقتها اذا سارت ٣٦٠ ميلاً ؟

(٨) قنطار علف يكفي ب بقرة ى يومًا فكم يومًا يكفي ل بقرة ؟

(٩) مزيج مؤلف من ب جزءًا من النحاس و ت جزءًا من التنك فكم جزءًا من المئة يكون النحاس ؟ التنك ؟

(١٠) كم تكون مساحة حقل طوله ل مترًا وعرضه م مترًا ؟

(القسم الثاني)

١٥٤ . الكسر عبارة عن خارج قسمة كمية على اخرى مثل $\frac{م}{ل}$. ونعلم ان خط الكسر يقوم مقام احد الحواصر فان $\frac{ل+م}{٥}$ تعني $(ل+م)\div ٥$

١٥٥ . حدّا الكسر . للكسر حدان الصورة والمخرج . فالصورة المقسوم والمخرج المقسوم عليه

١٥٦ . الكمية الصحيحة هي ما خلت من الكسر مثل $٥ل^{٢}-٤م^{٣}$. بعض الرياضيين يعتبرون الكمية التي تكون كل مسمياتها "العددية" او بعضها كسورًا كميات صحيحة نظير $٧ل^{٥}+٣\frac{١}{٢}ل^{٢}+٥\frac{١}{٢}ل+١٠\frac{١}{٢}$

١٥٧ . علامة الكسر . لكل كسر علامتان الخاصة التي تسبقه وهي غير علامة الصورة او علامة المخرج . وتفيد جمع الخارج او طرحه والكسر معها نظير كمية محصورة فاذا اريد تغيير العلامة المذكورة وجب تغيير علامات الصورة او المخرج

فعلامة $-\frac{ل}{م}$ هي "−" وعلامة $\frac{-ل}{م}$ هي "+"

١٥٨ . قانون العلامات . لنا بمبدإ قانون العلامات في الضرب والقسمة

$$\frac{ل}{م}=\frac{-ل}{-م}\;;\;-\frac{ل}{م}=\frac{-ل}{م}=\frac{ل}{-م}\;;\;\frac{ل}{م\times ن}=-\frac{ل}{-م\times ن}$$

$$\frac{ل}{-م\times -ن}\;;\;\frac{ل+م}{م-ل}=\frac{ل+م}{-(ل-م)}=-\frac{ل+م}{ل-م}$$

ونعبّر عن هذه النتائج بالقواعد الآتية :

(١) لا تتغير علامة الكسر اذا غيرنا علامة كل من صورته ومخرجه معًا

(٣) تتغير علامة الكسر باجمعها اذا غيرنا علامة الصورة او المخرج فقط

(٤) لا تتغير علامة الكسر اذا غيرنا علامات اي عدد مزدوج من اضلاع صورته او مخرجه

(٤) تتغير علامة الكسر اذا غيرنا علامات اي عدد مفرد من اضلاع صورته او مخرجه

مثال ١. اختزل

$$\frac{(ل-٣)^{٢}}{٩-ل^{٢}} - \frac{(ل-٣)(ل-٣)}{(٣-ل)(٣+ل)} - \frac{(٣-ل)(٣-ل)}{(٣-ل)(٣+ل)} - \frac{٣-ل}{٣+ل}$$

تمرين

اختزل ما يأتي:

(١) $\frac{ل^{٢}-١٦}{ل^{٢}-٨ل+١٦}$ (٢) $\frac{٤م^{٣}-٥م^{٢}-٤م+٥}{٨م^{٤}-١٠م^{٣}+١٢م-١٥}$ (٣) $\frac{(ل+م)^{٢}-ن^{٢}}{ل^{٢}-(م-ن)^{٢}}$

(٤) $\frac{(٣ك-ى)^{٢}}{ى^{٢}-٤ك^{٢}}$ (٥) $\frac{٤ل^{٢}-١٢ل م+٩م^{٢}}{٢ل^{٣}-٣ل^{٢}م}$ (٦) $\frac{٢٥-ى^{٢}}{ى^{٢}-٧ى+١٠}$

(٧) $\frac{ى^{٢}-ل^{٢}-٢ل م-م^{٢}}{(ى+م+ل)^{٢}}$ (٨) $\frac{ل-م}{م-ل}$ (٩) $\frac{ل^{٤}-٩ل^{٢}}{ل^{٤}-ل^{٣}-٦ل^{٢}}$

(١٠) $\frac{ل+م-ن}{ن^{٢}-(ل+م)^{٢}}$ (١١) $\frac{(ك+ى)^{٢}-(ل+م)^{٢}}{(ك-ل)^{٢}-(م-ى)^{٢}}$ (١٢) $\frac{م^{٦}-١}{م^{٣}-١}$

جمع الكسور وطرحها

ابسط:

(١) $\frac{ل^{٢}}{ل^{٢}-١} + \frac{ل}{ل+١} - \frac{ل}{١-ل} = \frac{ل^{٢}}{ل^{٢}-١} + \frac{ل}{ل+١}$

$$+ \frac{ل}{ل-١} = \frac{ل^{٢}+ل^{٢}-ل+ل^{٢}+ل}{ل^{٢}-١} = \frac{٢ل^{٢}}{ل^{٢}-١}$$

(٢) $\frac{١}{٢-م^{٢}} - \frac{١}{٢م+٢} + \frac{م-٥}{٦م^{٢}-٦}$ (٣) $\frac{ل-١}{ل-٢} - \frac{ل+١}{ل+٢} + \frac{ل-٦}{ل^{٢}-٤}$

(٤) $\frac{٢}{م^{٢}-١} + ٢ - \frac{م-١}{م+١} - \frac{م-٣}{م-١}$ (٥) $\frac{٢ن}{ن^{٢}-١} + \frac{٤}{١-ن} + \frac{١}{١+ن}$

(٦) $\frac{١}{ل-١} + \frac{١}{١+ل} + \frac{٢ل}{١-ل^{٢}}$ (٧) $\frac{٢ل}{ل^{٢}-م^{٢}} + \frac{٢}{م-ل} + \frac{١}{ل+م}$

(٨) $\frac{ك^{٢}+ى^{٢}}{ك^{٢}-ى^{٢}} - \frac{ك}{ك+ى} + \frac{ى}{ى-ك}$ (٩) $٢ل+م-\frac{ل^{٢}-٢م^{٢}}{٢ل-م}$

(١٠) $\frac{م^{٢}+ن^{٢}}{م-ن} + ن + م$ (١١) $\frac{م-٢ن}{م^{٢}+٢ن+ن^{٢}} - \frac{م^{٢}-٢ن^{٢}}{م^{٢}-ن^{٢}} + \frac{م^{٢}-ن}{م-ن}$

(١٣) $\frac{م+٢}{م^٢+٢م-٣} - \frac{م-٣}{م^٢-٣م+٢} + \frac{م+١}{م^٢+م-٦}$

(١٤) $\frac{ك^٢+ك ى+ى^٢}{ك+ى} + \frac{ك^٢-ك ى+ى^٢}{ك-ى}(\frac{ل^٢+م^٢}{ل^٢-ل م+م^٢}) - \frac{ل^٢-م^٢}{ل^٢+ل م+م^٢}$

(١٥) $\frac{١}{٨-٨ل} - \frac{٨+٨ل}{٤+٤ل^٢} + \frac{ل}{٢+٢ل^٤}$

(١٦) $\frac{١}{٦م-١٨} - \frac{٦م+١٨}{م^٢+٩} + \frac{١}{م^٤+٨١}$

ضرب الكسور وقسمتها

ابسط :

(١) $\frac{م^٢-٤م+٤}{م^٢+م} \cdot \frac{(م^٢-١)^٢}{م-٢} + \frac{(م-١)^٢(م^٢-٣م+٣)}{(م+١)^٢}$

$= \frac{(م-٣)^٢}{م(م+١)} \cdot \frac{(م^٢-١)(م^٢-١)}{(م-٣)} \cdot \frac{(م+١)(م+١)}{(م-١)(م-١)(م-١)(م-٣)}$

$= \frac{(م+١)^٢}{م(م-١)}$ (٢) $(١+\frac{٣}{م-٢})(٣-\frac{٦}{م+١})$ (٣) $(١+\frac{م}{ن})+(١-\frac{ن^٢}{م^٢})$

(٦) $\left(\frac{ل^{٢}-م^{٢}}{ل}\right)+\left(١-\frac{م^{٢}}{ل}\right)$ (٧) $\left(١+\frac{١}{م-١}\right)+\frac{١}{م-١}$

(٨) $\frac{ل^{٢}م+ل م^{٢}}{ل^{٢}+م^{٢}}+\frac{٥ل م(ل+م)^{٢}}{ل^{٤}-م^{٤}}$ (٩) $\frac{م^{٢}-١٨م+٨٠}{م^{٢}-٥م-٥٠}\times\frac{م^{٢}-٦م-٧}{م^{٢}-١٥م+٥٦}\times\frac{م+٥}{م-١}$

(١٠) $\frac{ك^{٢}-٨ك-٩}{ك^{٢}-١٧ك+٧٢}\times\frac{ك^{٢}-٢٥}{ك^{٢}-١}+\frac{ك^{٢}+٤ك-٥}{ك^{٢}-٩ك+٨}$

(١١) $\left(\frac{م^{٢}}{ن^{٢}}-\frac{ن^{٢}}{م^{٢}}\right)+\frac{م^{٤}+٣م^{٢}ن^{٢}+ن^{٤}}{م^{٣}ن-٤م ن^{٢}}$

(١٢) $\frac{(ل+م)^{٢}-ن^{٢}}{ل^{٢}+ل م-ل ن}\cdot\frac{ل}{(ل+ن)^{٢}-م^{٢}}\cdot\frac{(ل-م)^{٢}-ن^{٢}}{ل م-م^{٢}-م ن}$

(١٣) $\frac{ل^{٢}+٢ل م+م^{٢}-ن^{٢}}{ل^{٢}-م^{٢}-ن^{٢}-٢م ن}\times\frac{ل^{٢}-٢ل ن+ن^{٢}-م^{٢}}{م^{٢}-٢م ن+ن^{٢}-ل^{٢}}$

(١٤) $\frac{(ل+م)^{٢}-ن^{٢}}{(ل+م+ن)^{٢}}\times\frac{ل^{٢}+ل م+ل ن}{(ل-ن)^{٢}-م^{٢}}+\frac{ل^{٢}-ل م+ل ن}{(ل-م)^{٢}-ن^{٢}}$

(١٥) $\frac{ك^{٤}-ى^{٤}}{ك^{٢}-٢ك ى+ى^{٢}}+\left(\frac{ك^{٢}ى+ى^{٣}}{ك^{٢}-ى^{٢}}\cdot\frac{ك^{٤}+ك^{٢}ى^{٢}+ى^{٤}}{ك^{٣}ى-ك ى^{٣}+ى^{٤}}\right)$

١٥٨. الترتيب الدائري . ابسط :

$$\frac{١}{(ل-م)(ل-ن)} + \frac{١}{(م-ن)(م-ل)} + \frac{١}{(ن-ل)(ن-م)} .$$

ان اول ما يتبادر الى الذهن ان المخرج الاصغر هو حاصل الست كميات الموجودة في المخارج ولكن الحقيقة غير ذلك لان ثلاثة منها تختلف عن البقية في العلامات فقط فان :

$$(ل-ن) = -(ن-ل)$$
$$\text{و } (م-ل) = -(ل-م)$$
$$\text{و } (ن-م) = -(م-ن)$$

واذا وضع بدل الضلع الثاني في كل مخرج ما يساويه امكننا ان نكتب السؤال على الشكل الآتي :

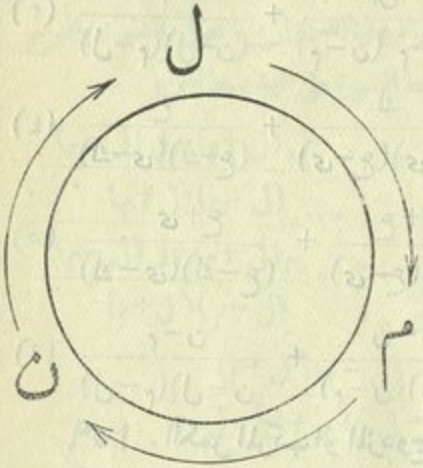
$$-\frac{١}{(ل-م)(ن-ل)} - \frac{١}{(م-ن)(ل-م)} - \frac{١}{(ن-ل)(م-ن)} \quad \ldots (١)$$

والآن نرى جلياً ان المخرج الاصغر المشترك هو $(ل-م)(م-ن)(ن-ل)$ وبالتحويل تصير الكمية

$$\frac{-(م-ن)-(ن-ل)-(ل-م)}{(ل-م)(م-ن)(ن-ل)}$$

$$= \frac{-م+ن-ن+ل-ل+م}{(ل-م)(م-ن)(ن-ل)} = ٠ \quad \text{وهو الجواب}$$

واذا دققنا النظر في ترتيب الحروف في الكمية السابقة نومرو (١) نجد انها موضوعة بترتيب يسمى الترتيب الدائري او التعاقب الدائري اي ان م تتبع ل ون تتبع م ول تتبع ن فلو كتبنا الحروف ل وم ون على محيط دائرة وبدأنا باي حرف منها وتبعنا اتجاه السهام كما ترى في الرسم نجد ان الحرفين الآخرين يتبعانه على ترتيب دائري هكذا ل م ن ؛ م ن ل ؛ ن ل م .



ومراعاة هذه القاعدة ضرورية جداً في حل كثير من المسائل التي تشتمل على ثلاثة حروف مطروح بعضها من بعض . فالكميات ل — م وم — ن ون — ل موضوعة على ترتيب دائري اما ل — م ون — م ول — ن وما شابهها فترتيب الحروف فيها يخالف الترتيب الدائري. ومن المؤكد انه في هذا النوع من المسائل . يمكننا دائماً اختصار العمل وتسهيله باتباع الترتيب الدائري ولوزم مراعاته منذ البداءة حتى النهاية

تمرين

ابسط :

(١) $\frac{٢}{(ك-ى)(ك-ع)} - \frac{١}{(ك-ى)(ع-ك)}$

(٣) $\frac{٤ع}{(ع-٢)(ع-٤)} - \frac{٢ع}{(٢-ع)(٤-ع)}$

(٤) $\frac{م}{(ل-م)(ل-ن)} + \frac{ن}{(م-ن)(م-ل)} + \frac{ل}{(ن-ل)(ن-م)}$

(٥) $\frac{ع}{(ك-ى)(ك-ع)} + \frac{ك}{(ى-ع)(ى-ك)} + \frac{ى}{(ع-ك)(ع-ى)}$

(٦) $\frac{ى+ع}{(ك-ى)(ك-ع)} + \frac{ع+ك}{(ى-ع)(ى-ك)} + \frac{ك+ى}{(ع-ك)(ع-ى)}$

(٧) $\frac{م-ن}{(ل-م)(ل-ن)} + \frac{ن-ل}{(م-ن)(م-ل)} + \frac{ل-م}{(ن-ل)(ن-م)}$

١٥٩ . الكسر المركب او المزدوج . نعلم ان الخط الافقي الذي ينفصل صورة الكسر عن مخرجهِ يدل على القسمة فهو علامة من علامات القسمة وبذات الوقت هو احدى علامات المحاصر . فاذًا م/ل يمكن كتابتها ايضًا ل ÷ م وكذلك ك ÷ ى يكتب ى/ك . وبذات الوقت يدل على قسمة الكسور بالخط الافقي فاصلاً المقسوم اي الصورة عن المقسوم عليهِ او المخرج

فَ ل ÷ ن/م تكتب $\frac{\text{ل}}{\text{ن/م}}$

و م/ل ÷ ن تكتب $\frac{\text{م/ل}}{\text{ن}}$

و م/ل ÷ ى/ن تكتب $\frac{\text{م/ل}}{\text{ى/ن}}$

وهذا النوع من الكسر اي ما كانت صورتهُ ومخرجهُ او كلاهما كسرًا يقال له كسر مركب او كسر مزدوج

١٦٠ . وجليٌّ للعيان ان تحويل الكسر المركب او بسطهِ ليس سوى قسمة صورتهِ على مخرجهِ . ويجب قبل اجراء عملية القسمة ان تحوّل الصورة والمخرج الى ابسط شكل وبعد ذلك نقسم نتيجة بسط الصورة على نتيجة بسط المخرج

مثال ١ . ابسط $\dfrac{\dfrac{\text{ل}}{\text{ل}-\text{م}}-\dfrac{\text{ل}}{\text{ل}+\text{م}}}{\dfrac{\text{م}}{\text{ل}-\text{م}}+\dfrac{\text{ل}}{\text{ل}+\text{م}}}$

$$=\frac{\dfrac{\text{ل}(\text{ل}+\text{م})-\text{ل}(\text{ل}-\text{م})}{(\text{ل}-\text{م})(\text{ل}+\text{م})}}{\dfrac{\text{م}(\text{ل}+\text{م})+\text{ل}(\text{ل}-\text{م})}{(\text{ل}-\text{م})(\text{ل}+\text{م})}}$$

$$=\frac{\text{ل}^{٢}+\text{ل م}-\text{ل}^{٢}+\text{ل م}}{(\text{ل}-\text{م})(\text{ل}+\text{م})}\cdot\frac{(\text{ل}-\text{م})(\text{ل}+\text{م})}{\text{ل م}+\text{م}^{٢}+\text{ل}^{٢}-\text{ل م}}$$

$$=\frac{٢\,\text{ل م}}{\text{ل}^{٢}+\text{م}^{٢}}$$ وهو الجواب

تمرين

ابسط :

(١) $\dfrac{\dfrac{٧\,\text{م}^{٢}\text{ن}}{\text{ك}}}{\dfrac{١٤\,\text{م}}{\text{ك}^{٢}}}$ (٢) $\dfrac{٢}{١-\dfrac{١}{\text{ك}}}$ (٣) $\dfrac{\text{ى}-\dfrac{\text{ى}}{٢}}{\text{ى}+\dfrac{\text{ى}}{٢}}$ (٤) $\dfrac{\text{ك}+\dfrac{١}{٢}}{\text{ك}^{٢}-\dfrac{١}{٤}}$

(٥) $\dfrac{ك + \frac{ى}{٢}}{ك^{٢} - \frac{ى^{٢}}{٤}}$ (٦) $\dfrac{١ + ك}{\frac{ك}{١ - \frac{١}{ك^{٢}}}}$ (٧) $\dfrac{م + \frac{م}{د}}{١ + \frac{١}{د}}$ (٨) $\dfrac{\frac{ل}{م} + \frac{م}{ل}}{\frac{ل}{م} - \frac{ل}{م}}$

(٩) $\dfrac{٩ - \frac{ل^{٢}}{٤م^{٢}}}{١ - \frac{ل}{٦م}}$ (١٠) $\dfrac{ع^{٢} - \frac{م^{٢}}{ع^{٢}}}{ع + \frac{م}{ع}}$ (١١) $\dfrac{ك - ١٢ + \frac{٤٠}{ك}}{ك - ٢ - \frac{١٠}{ك}}$

(١٢) $\dfrac{\frac{ل}{ل - م}}{١ + \frac{م}{ل - م}}$ (١٣) $\dfrac{\frac{ى}{ى - ٢} - \frac{ى}{ى + ٢}}{\frac{١}{ى^{٢} + ى - ٦}}$ (١٤) $\dfrac{١ + \frac{م^{٢}}{ن^{٢}}}{م + \frac{ن^{٢}}{م} - ن}$

(١٥) $\dfrac{\frac{ل}{ل + ٢} - \frac{ل}{ل - ٢}}{\frac{ل^{٢}}{ل + ٢} - \frac{ل^{٢}}{ل - ٢}}$ (١٦) $\dfrac{\frac{م}{ن} - \frac{م + ن}{م - ن}}{\frac{م}{ن} + \frac{م + ن}{م - ن}}$ (١٧) $\dfrac{\frac{ل^{٢} + م^{٢}}{ل^{٢} - م^{٢}} - \frac{ل^{٢} - م^{٢}}{ل^{٢} + م^{٢}}}{\frac{ل + م}{ل - م} - \frac{ل - م}{ل + م}}$

(١٨) $\dfrac{\left(\dfrac{ل^٢-م^٢}{ل-م}-\dfrac{ل^٢+م^٢}{ل+م}\right)}{\dfrac{٤ل م}{ل^٢-م^٢}}$ (١٩) $\dfrac{١+\dfrac{ل-م}{ل+م}}{١-\dfrac{ل-م}{ل+م}}+\dfrac{١+\dfrac{ل^٢-م^٢}{ل^٢+م^٢}}{١-\dfrac{ل^٢-م^٢}{ل^٢+م^٢}}$

(٢٠) $\dfrac{\dfrac{ل+م}{ل-م}+\dfrac{ل-م}{ل+م}}{\dfrac{ل-م}{ل+م}-\dfrac{ل+م}{ل-م}}\times\dfrac{ل م^٢-ل^٢م}{ل^٢+م^٢}$

(٢١) $\dfrac{\dfrac{ك}{ى}+\dfrac{ى}{ك}-١}{\dfrac{ك^٢}{ى^٢}+\dfrac{ك}{ى}+١}\times\dfrac{١+\dfrac{ى}{ك}}{ك-ى}+\dfrac{١+\dfrac{ى^٢}{ك^٢}}{\dfrac{ك^٢}{ى}-\dfrac{ى^٢}{ك}}$

(٢٢) $\dfrac{١}{م-\dfrac{١}{م+\dfrac{١}{٢}}}\times\dfrac{١}{٢+\dfrac{١}{٢}}+\dfrac{م}{٢م^٢-\dfrac{م^٤+٢}{م^٢+١}}$

(٣٣) $\frac{ل^٤+م^٤+ل م(ل^٢+م^٢)}{(ل+م)^٢} - \frac{ل^٤+م^٤-ل م(ل^٢+م^٢)}{(ل-م)^٢} + \frac{١٢ ل^٢ م^٢}{(ل+م)^٢-(ل-م)^٢}$

(٣٤) $\frac{١+ك}{١-ك} + \frac{٤ك}{١+ك^٢} + \frac{٨ك}{١-ك^٢} - \frac{١-ك}{١+ك}$

$$\frac{\frac{١+ك^٢}{١-ك^٢} + \frac{٤ك^٢}{١+ك^٤} - \frac{١-ك^٢}{١+ك^٢}}{}$$

(٣٥) $\frac{\frac{(ل+م)^٢+(ل-م)^٢}{م-ل} - (ل+م)}{\frac{١}{م-ل} - \frac{١}{ل+م}} + \frac{(ل+م)^٢+(م-ل)^٢}{(ل+م)^٢-(ل-م)^٢}$

الفصل العاشر

المعادلات الكسرية والحرفية

القسم الاول

١٦١ . المعادلة الكسرية هي ما اشتملت على كسر او اكثر مثل $\frac{٢}{ك} - ٥ = ٧$ ؛ $\frac{ك+١}{ك-١} = ٨$

ويمكننا ان نحوّل المعادلة الكسرية الى معادلة صحيحة بضرب حديها في المخرج الاصغر المشترك ويجب الانتباه دائمًا ان خط الكسر نوع من انواع الاقواس او الحواصر

مثال ١. $\frac{٣ك - ١}{٤} - \frac{٤ك - ٥}{٥} = ٤ + \frac{٧ك + ٥}{١٠}$

نضرب طرفي المعادلة في ٢٠ المخرج الاصغر المشترك فنجد

$٥(٣ك - ١) - ٤(٤ك - ٥) = ٢٠ \times ٤ + ٢(٧ك + ٥)$

ويرفع الاقواس $١٥ك - ٥ - ١٦ك + ٢٠ = ٨٠ + ١٤ك + ١٠$

وبالمقابلة $١٥ك - ١٦ك - ١٤ك = ٨٠ + ١٠ + ٥ - ٢٠$

وباصلاح الحدود $-١٥ك = ٧٥$

$\therefore$ $ك = -٥$ وهو الجواب

مثال ٢ . $\frac{٣}{م^٢-٤} + \frac{٥}{م+٢} - \frac{٢}{م-٢} = ٠$

نضرب طرفي المعادلة في $م^٢-٤$ فيحدث

$٣+٥(م-٢)-٢(م+٢) = ٠$

$٣+٥م-١٠-٢م-٤ = ٠$

$٣م = ١٢$

$م = ٤$ وهو الجواب

١٦٣ . اذا وجد كسور عشرية فالافضل تحويلها الى كسور اعتيادية اولاً ثم اتباع اساليب الحلّ السابقة . وقد يتفق احيانًا ان يكون العمل بالكسور العشرية ابسط واسهل فيجب والحالة هذه ان تبقى كما هي

مثال ١ . $٦٫ل + ٢٥٫ - ٠٫١ل = ٨٫١ - ٧٥٫ل - ٠٫١$

$٠٫٢ل + ٠٫٢٥ - ٠٫١ل = ٠٫١٨ - ٠٫٢٥ل - ٠٫١$

$٢٤ل + ٩ - ٤ل = ٦٨ - ٢٧ل - ١٢$

$٤٧ل = ٤٧$

$ل = ١$ وهو الجواب

مثال ٢ . $٤٧٥٫م - ١٫٨٧٥ = ١٢٫م + ١٫١٨٥$

$٤٧٥٫م - ١٢٫م = ١٫١٨٥ + ١٫٨٧٥$

$٤٦٣٫م = ٣٫٠٦٠$

$م = ١٢$ وهو الجواب

تمرين كتابي

(١) $\frac{م^{٢}}{٨} - \frac{٣}{٢} = ٠$ (٢) $\frac{ل}{٢} + \frac{ل}{٣} = ١٠$ (٣) $\frac{م - ٥}{٣} = ٥$

(٤) $ل + \frac{ل}{٣} = ١٨$ (٥) $\frac{ل}{٢} + \frac{ل}{٤} = ١٥$ (٦) $\frac{م^{٢}}{٢} - \frac{٢}{٣} = ١٠$

(٧) $\frac{٦}{م - ٢} = ١$ (٨) $\frac{ك}{٢} - \frac{٣}{٢} = \frac{ك}{٦}$ (٩) $\frac{٣ - م}{٢} = \frac{٢ - م}{٣}$

(١٠) $\frac{٥ى}{٤} - \frac{٧ى}{٦} = \frac{١}{٤}$ (١١) $\frac{٣}{٥م - ١} = \frac{٢}{٥ + م^{٢}}$

(١٢) $\frac{٢م - ٣}{٤م - ٥} = \frac{٤}{٧}$ (١٣) $\frac{م}{م - ٣} = \frac{م + ١}{م - ٤}$

(١٤) $\frac{٥}{م} + \frac{٤}{٣} = \frac{٩}{م}$ (١٥) $\frac{ك + ١}{ك - ١} = \frac{٢ك - ٥}{٢ك - ٧}$

(١٦) $\frac{ك + ٣}{ك - ٣} = -\frac{٥ - ٢ك}{٢ك - ١٠}$ (١٧) $\frac{٥م + ١}{٥م - ١} = \frac{٢م + ٣}{٢م + ٢}$

(١٨) $\frac{٥}{٢ك-١} = \frac{٨}{٢ك+١}$ (١٩) $\frac{٦ل-٥}{٣ل-٣} = \frac{٨ل-٧}{٤ل+٤}$

(٢٠) $\frac{ر}{٣} - \frac{ر^{٢}-٥ر}{٣ر-٧} = \frac{٢}{٣}$ (٢١) $\frac{م-٦}{٨} + ١ = \frac{٢م+٤}{٩}$

(٢٢) $\frac{١٢ع+٢}{١١} + \frac{٤ع+١}{٢} = ٣$ (٢٣) $\frac{٣}{٤م} + \frac{٦}{٥م} = \frac{١٣}{٢٠}$

(٢٤) $\frac{٥}{٢ك} - \frac{٣}{ك} + \frac{١}{١٢} = ٠$ (٢٥) $\frac{١}{م+١} + \frac{١}{م-١} = \frac{٢}{م+٢}$

(٢٦) $٥ل' - ٤ل = ٣'$ (٢٧) $٦م' - ٥' = ١ - ٢' - ١٥م'$

(٢٨) $٧م' + ٨م' = ٥'٤$ (٢٩) $٨ل' = ٦'٣ - ٤ل'$

(٣٠) $٥م' - ٣م' = ٣٥م' - ١$ (٣١) $٢ل' - ١٦ل' = ٦' - ٣'$

١٦٣. المعادلة العددية هي معادلة فيها يعبّر عن الكميات المعلومة بالارقام او الاعداد

١٦٤. المعادلة الحرفية هي ما يعبّر فيها عن الكميات المعلومة بالحروف مثل ب وت وج .... الخ ونحل بالطرق التي نستخدمها لحلّ المعادلة العددية

مثال ١. $ب(م-ب) = ت(م-ت)$

$ب م - ب^{٢} = ت م - ت^{٢}$

$ب م - ت م = ب^{٢} - ت^{٢}$

$(ب-ت)م = ب^{٢} - ت^{٢}$

$\therefore م = ب + ت$ وهو الجواب

مثال ٢. $\frac{ب}{ل-ب} - \frac{ت}{ل-ت} = \frac{ب-ت}{ل-س}$

$$\frac{ب(ل-ت)-ت(ل-ب)}{(ل-ب)(ل-ت)} = \frac{ب-ت}{ل-س}$$

$$\frac{(ب-ت)ل}{(ل-ب)(ل-ت)} = \frac{ب-ت}{ل-س}$$

$$\frac{ل}{(ل-ب)(ل-ت)} = \frac{١}{ل-س}$$

$$ل^{٢}-ل س = ل^{٢}-ب ل-ت ل+ب ت$$

$$\therefore ل = \frac{ب ت}{ب+ت-س}$$

تمرين كتابي

(١) $٣ك+٢ب=ك+٨ب$ (٢) $٩ت ك-٣ب=٢ت ك+٤ب$

(٣) $٦دك+٣=٣دك+٨$ (٤) $٣دك+ب=٦دك-٢ب$

(٥) $٤ك-ب^{٢}=٣ك+ب^{٢}$ (٦) $ل^{٢}+د=(ل+د)^{٢}$

(٧) $دك-ح^{٢}=دح-ح ك$ (٨) $ت(ك-ت)=ب(ك-ب)$

(٩) د ك + ب = ب ك + ٢ ب (١٠) (ك + ب)(ك - ت) = ك^{٢}

(١١) (ل - ١)(ل - ٢) = (ل - د)^{٢} (١٢) ك^{٢} + ٣ د ك = (ك + د)^{٢}

(١٣) $\frac{٢}{ب} = \frac{ت}{٢ب}$ (١٤) $٧ = \frac{٨ب}{ك - ب}$ (١٥) $\frac{٣}{ك - ٣د} = \frac{٥}{٤د}$

(١٦) $\frac{٣ك}{ب} = \frac{٥د}{٤ب}$ (١٧) $ب + ت = \frac{د + ح}{ك}$ (١٨) $\frac{٣}{ك - د} = \frac{٤}{د - ح}$

(١٩) $\frac{د ك}{ب} = \frac{س}{ح}$ (٢٠) $\frac{ب + ت}{ك} = \frac{س + د}{٧}$

(٢١) $\frac{ب + ت}{ك + ٣} = \frac{ت - ب}{ك - ٣}$ (٢٢) $\frac{٤ ك + ب}{٦ ك + د} = \frac{٢ك - د}{٣ك - ب}$

(٢٣) $\frac{ك}{د} + \frac{ك}{ح} + \frac{ك}{ب} = س$ (٢٤) $\frac{١}{د} - \frac{١}{ك} = \frac{١}{ك} - \frac{١}{ب}$

(٢٥) $\frac{٢د}{ب} - \frac{٣ك}{ب} = \frac{٤ب}{د} - \frac{٢ك}{د}$ (٢٦) $\frac{١٢ ك + ب}{٨ ك + د} = \frac{٦ك - د}{٤ك - ب}$

(٢٧) $\frac{ك - د}{ب - ك} = \frac{ك - ب}{د - ك}$

تمرين كتابي

اجب ما استطعت شناها

(١) كم ثمن ب بيضة اذا كان ثمن الدزينة غ غرشاً

(٢) كم ثقل ي يرد شريط اذا كان ثقل ق قدماً ل ليبرة

(٣) ك تساوي اي جزء من المئة من ٣٠؟ من ٣٥؟ من ٤٠؟

(٤) ك + ٥ تساوي اي جزء من المئة من ٣٥؟ من ٤٠؟ من ٦٠؟

(٥) ماذا يصير الكسر $\frac{٩}{١٧}$ اذا اضفت م الى صورته؟

(٦) ماذا يصير الكسر $\frac{١٥}{٤٧}$ اذا طرحت ل من مخرجه؟

(٧) ماذا يصير الكسر $\frac{ك}{ب}$ اذا اضفت م الى كل من صورته ومخرجه؟

(٨) سار ساعٍ ٩ ساعات قبل ان تبعه آخر وادركه بعد س ساعة فكم ساعة سار الاول؟ كم ميلاً جرى اذا كان معدل سيره ٤ اميال في الساعة؟ كم ميلاً جرى الثاني اذا كان معدل سيره ٥ اميال في الساعة؟

(٩) ما العدد الذي ثلثه ٣٨٠؟

(١٠) كم يكون ثمن قطعة ارض اذا كان ثمن ثلثيها ٨٦٠٠ ليبرة؟

(١١) ما العدد الذي ينقص ربعه عن ٢٤٠ بـ ٩٠؟

(١٢) ما العدد الذي اذا زدت عليه ربعه و ٥٠ صار ٣٥٠؟

(١٣) ما العدد الذي اذا طرحت منه ثلثه ثم جمعت الى الباقي ٦٠ صار ٣٠٠؟

(١٤) ما العدد الذي يكون الفرق بين ثلثيه ونصفه ١٥٠؟

(١٥) وهب رجل ابنه وابنته ٣٦٠٠٠ ليبرة بشرط ان يأخذ الابن ٣/٤ ما تأخذه الابنة فكم تكون حصة كل منهما؟

(١٦) جد عددين متتابعين يزيد ١/٧ اكبرهما عن ١/٩ الاصغر؟

(١٧) مجموع ثلاثة اعداد ٢٠٤٠٠ فاذا كان الثاني نصف الاول والثالث خمسة (٪ الاول) فما هي الاعداد؟

(١٨) ثقل القدم المكعبة من الماء والقدم المكعبة من الكحول (السبيرتو) ١١٢٫٥ ليبرة فكم يكون ثقل كل منهما اذا كان ثقل الكحول $\frac{٤}{٥}$ ثقل الماء؟

(١٩) اقتسم شريكان ارباح ٦٠٠٠ ليرة في نهاية السنة واصاب الاول ٤٠٪ اكثر من الثاني فكم اخذ كل منهما؟

(٢٠) علامة أميل ٧٧ في الحساب ومعدله في الحساب والعربية ٨٣ فكم تكون علامته في العربية؟

(٢١) معدل علامات يوسف ٨٦ وعلاماته في الحساب ٩٥ والقراءة ٨٧ والجغرافية ٨٤ فكم تكون علامته في العلوم؟

(٢٢) اي عدد تضيفه الى كل من صورة ومخرج الكسر $\frac{٢١}{٤٥}$ ليصير $\frac{٤}{٥}$؟

(٢٣) اي عدد تطرحه من صورة الكسر ٣٧/٤٠ ليصير ٧/٨؟

(٢٤) اي عدد تضيفه الى مخرج الكسر ٢/٣ ليصير ٣/٨؟

(٢٥) لدى رجل مزيج ٢٦ ليتراً من الماء والسبيرتو فاذا كان السبيرتو ٨ ليترات كم ليتراً من الماء تزاد على المزيج ليصير الكحول ٤٪ الماء؟

(٢٦) مزيج مركب من ٨ ليترات من الحامض و ١٤ ليتراً من الماء فكم ليتر ماء تزاد على المزيج ليصير الحامض ١/٥ الماء؟

(٢٧) اذا قسمت عدداً على ١٢ كان الخارج ٢١ والباقي ٤ فما هو العدد؟

(٢٨) اذا قسمت عدداً على ٢٤ كان الخارج ٣٥ والباقي ٢ فما هو العدد؟

(٣٩) ابتاع رجل بـ ٤٪ مالو اسهماً ارباحها ٥٪ وبالباقي اسهماً ارباحها ٦٪ فكان مجموع مدخولة ٧٨٠ ليرة فكم كان رأس مالو ؟

(٤٠) وظف رجل ¼ مالو بفائدة ٥٪ وخمسيه بفائدة ٤٪ والباقي بفائدة ٦٪ فكم كان مالهُ اذا كان مدخولهُ ١٩٨٠٠ غرش ؟

(٤١) طول قاعة ٢٠ متراً وعرضها ١٢ فاذا كانت مساحة الحيطان والسقف ٧٥٢ متراً مربعاً فكم يكون ارتفاعها ؟

(٤٢) جد اربعة اعداد متتابعة بحيث اذا قسمت الاول على ٢ والثاني على ٣ والثالث على ٤ كان مجموع الخوارج مساوياً للعدد الرابع

(٤٣) يكتب عزيز ١٥ كلمة بقلمو في الدقيقة وتكتب نجلا ٤٠ كلمة على الآلة الكاتبة في ذات الوقت فاذا بدأ عزيز بنسخ مقالة قبل نجلا بثلاث ساعات ففي كم من الوقت تدركهُ وتلحق بهِ ؟

(٤٤) اي وقت بين الساعة ٤ و ٥ يكون عقربا الساعة (١) متقارنين (٢) بينهما زاوية قائمة (الفرق بينهما ١٥ دقيقة) (٣) متعاكسين او بخط مستقيم (الفرق بينهما ٣٠ دقيقة) ؟

في اعمال كهذه يجب ان نلاحظ ان وجه الساعة مقسوم الى ٦٠ قسماً متساوياً ندعوها "مسافات الدقائق". وفي كل ساعة او كل دورة كاملة يسير عقرب الدقائق ٦٠ قسماً بينما عقرب الساعات يسير ٥ منها فقط. اي ان عقرب الدقائق يسير ١٢ مرة قدر عقرب الساعات وبكلام آخر معدل سير عقرب الساعات ٦٠٪ او ١/١٢ من معدل سير عقرب الدقائق

لنفرض ك عدد الدقائق التي يجتازها عقرب الدقائق ومعدل سرعتهُ "مسافة دقيقة" في الدقيقة فاذا عقرب الساعات يجتاز ١٢/ك في نفس الوقت فلنا اذاً في :

(١) ك عدد الدقائق التي يجتازها عقرب الدقائق ليلحق عقرب الساعات وينطبق عليهِ تساوي ٣٠ دقيقة مع ما يجتازهُ عقرب الساعات اي ١٢/ك

∴ ك – ٣٠ = ١٢/ك ومنها ك = ١١/٢١٦ دقيقة

فيكون العقربان منطبقين الساعة ٤ و١١/٢١٦ دقيقة

لكي يكون الفرق بينهما ١٥ قسماً فعقرب الدقائق يجب ان يسبق عقرب الساعات ٣٠ = ١٥ اي ٥ اقسام او ٣٠ + ١٥ اي ٣٥ قسماً

∴ ك = ٥ + ١٢/ك ومنها ك = ١١/٥٤ دقيقة

او ك = ٣٥ + ١٢/ك ومنها ك = ١١/٣٨٢ دقيقة

فيكون احدهما عمودياً على الآخر الساعة ٤ و١١/٥٤ دقيقة او ١١/٣٨٢ دقيقة

(٤) لكي يكونا متعاكسين يجب ان يسبق عقرب الدقائق عقرب الساعات (٣٠ + ٣٠) قسماً او ٥٠ قسماً

∴ ك = ٥٠ + ١٢/ك ومنها ك = ١١/٥٤٦ دقيقة

فيكون العقربان متعاكسين او بخط مستقيم الساعة ٤ و١١/٥٤٦ دقيقة

جد الاوقات التي يكون فيها عقربا الساعة (١) متقارنين (٢) بينهما زاوية قائمة (٣) متعاكسين بين الساعات الآتية :

(٣٥) الساعة ٣ و٤ (٣٦) الساعة ٥ و٦ (٣٧) الساعة ٨ و٩

(٣٨) متى يكون عقرب الدقائق سابقاً عقرب الساعات ٣٠ قسماً بين الساعة ٥ و٦ ؟

(٣٩) رجل يتم عملاً في ٨ ايام وآخر في ١٠ والثالث في ١٢ فاذا اشتغل الثلاثة معاً ففي كم من الوقت يتممونه ؟

الحل : افرض ك عدد الايام المطلوب

الاول يتم العمل في ٨ ايام ففي اليوم الواحد يتم ١/٨ العمل

الثاني " " ١٠ " " " " ١/١٠ "

الثالث " " ١٢ يوماً " " " ١/١٢ "

الثلاثة معاً يتممون " في ك " " " يتممون ك/١ "

∴ ١/٨ + ١/١٠ + ١/١٢ = ك/١ ومنها ك = ٢٤/٧ ٣ يوماً

(٤٠) جميل يتم عملاً في ٥ ايام ومحمد في ٧ فاذا اشتغلا معاً ففي كم من الوقت يتمانه؟

(٤١) انبوب يملأ بركة في ٦ ساعات وآخر في ٩ فاذا كانت البركة فارغة وفتح الانبوبان معاً ففي كم من الوقت تمتلئ؟

(٤٢) تطبع مطبعة كراساً في ٥٠ دقيقة واخرى تطبعه في ٤٠ دقيقة ففي كم من الوقت تطبعه المطبعتان معاً؟

(٤٣) ثقل المريخ ٩ اضعاف القمر وثقل الارض ٨١ قدر ثقل المريخ والقمر معاً فكم يكون ثقل كل من المريخ والقمر بالنسبة الى ثقل الارض؟

(٤٤) كان عمر روزه ٢/٣ عمر زوجها يوسف حينما اقترنا ولكن بعد مضي ١٢ سنة اصبح ٤/٥ عمره فكم كان عمر كل منهما وقت الزواج؟

(٤٥) امين اكبر من بطرس بـ ١٢ سنة ومنذ ٨ سنين كان عمر بطرس ١/٢ عمر امين فكم عمر كلٍّ منهما؟

تمرين موقت

الوقت دقيقة واحدة

حلّ ما يأتي ولا تنقل المسائل :-

(١) ك/٢ = ٥ (٢) ك/٢ = ٨ (٣) ك/٤ = ٦

(٤) ب/ك = ٦ (٥) ب/ك = ت (٦) ت/ك = ب

(٧) ب/ك = ب (٨) ك/٨ = ٢ (٩) ك/٩ = ١

(١٠) $\frac{١٠}{ك} = ٣$ (١١) $\frac{٣}{ل} = ١١$ (١٢) $\frac{ح^{٢}}{د} = ح$

(١٣) $\frac{د}{ك} = ح$ (١٤) $\frac{د ح}{ك} = ١$ (١٥) $\frac{١٤}{ك} = ١٩$

(١٦) $\frac{١٢}{ك} = ١٣$ (١٧) $\frac{١١}{ى} = ١^{٢}$ (١٨) $\frac{١٢^{٢}}{ى} = ٣^{٢}$

(١٩) $\frac{٢^{٢}}{ك} = ٤^{٢}$ (٢٠) $\frac{ب}{ك} = ٣^{٢}$

عدد الاصابات ١٥

تمرين موقت

الوقت : ٥ دقائق

انقل وحلّ المعادلات الآتية :

(١) $\frac{ك^{٢}}{٣} + \frac{ك}{٣} = ١٥$ (٢) $\frac{ل^{٢}}{٣} - \frac{ل}{٦} = ٥$

(٣) $\frac{ر^{٢}}{٢} - \frac{ر^{٢}}{٤} = ٣$ (٤) $\frac{ب}{ل} - \frac{ت}{ل} = س$

(٥) $\frac{س}{ل} - \frac{ب}{ل} = ت$ (٦) $\frac{ر^{٢}}{٥} - \frac{ر^{٢}}{٦} = ٢$

(٧) $\frac{ر^{٢}}{٢} + ١ = ٣$ (٨) $\frac{ر^{٢}}{٤} - \frac{ر^{٢}}{٢} = -٢$

(٩) $\frac{د}{ل} - \frac{د}{٣} = ٣$ (١٠) $\frac{ب ر^{٢}}{٢} - \frac{ت ر^{٢}}{٢} = ب^{٢}$

(١١) $\frac{ر^{٢}}{٢} + \frac{ر^{٢}}{٣} + \frac{ر^{٢}}{٦} = ١$ (١٢) $\frac{ل}{٥} - \frac{ل}{٣} = -٢$

(١٣) $\frac{ر^{٢}}{٣} + \frac{ر^{٢}}{٤} = ٦^{٢}$ (١٤) $\frac{ب}{ل} + \frac{ت}{ل} + \frac{س}{ل} = ١$

(١٥) $\frac{ب}{ل} - \frac{ت}{ل} + \frac{س}{ل} = ١$

عدد الاصابات ٨

القسم الثاني

١٦٥. مسائل في حلّ المعادلات

مثال ١ . حلّ $\frac{٤}{ك+١} + \frac{ك+١}{١-ك} - \frac{ك^٢-٣}{١-ك^٢} = ٠$

اضرب بالمقدار المشترك $١-ك^٢$ فيحصل

$$٤(١-ك)+(ك+١)^٢-(ك^٢-٣)=٠$$

وبالبسط $ك=٤$ وهو الجواب

مثال ٢ . $\frac{م-٨}{م-١٠} - \frac{م-٥}{م-٧} = \frac{م-٧}{م-٩} - \frac{م-٤}{م-٦}$

ابسط كل طرف من المعادلة على حدةٍ فيكون لنا

$$\frac{(م-٨)(م-٧)-(م-٥)(م-١٠)}{(م-١٠)(م-٧)} = \frac{(م-٧)(م-٦)-(م-٤)(م-٩)}{(م-٩)(م-٦)}$$

$$\therefore \frac{م^٢-١٥م+٥٦-م^٢+١٥م-٥٠}{(م-١٠)(م-٧)} = \frac{م^٢-١٣م+٤٢-م^٢+١٣م-٣٦}{(م-٩)(م-٦)}$$

$$\therefore \frac{٦}{م^٢-١٧م+٧٠} = \frac{٦}{م^٢-١٥م+٥٤}$$

ومعلوم انه اذا تساوت الصور تكون المخارج متساوية وكذلك متى تساوت المخارج تكون الصور متساوية

∴ م٢ – ١٧ م + ٧٠ = م٢ – ١٥ م + ٥٤

∴ ٢م = ١٦

∴ م = ٨ وهو الجواب

ويمكن حلّ السؤال السابق بالطريقة الآتية

$$\frac{(م-١٠)+٢}{م-١٠} - \frac{(م-٧)+٢}{م-٧} - \frac{(م-٩)+٢}{م-٩} - \frac{(م-٦)+٢}{م-٦}$$

ومنها $١ + \frac{٢}{م-١٠} + ١ + \frac{٢}{م-٦} - ١ + \frac{٢}{م-٩} + ١ + \frac{٢}{م-٧}$

أي $\frac{١}{م-١٠} + \frac{١}{م-٦} - \frac{١}{م-٩} + \frac{١}{م-٧}$

∴ $\frac{١}{م-١٠} - \frac{١}{م-٧} - \frac{١}{م-٩} - \frac{١}{م-٦}$

∴ $\frac{٢}{م^٢-١٧م+٧٠} - \frac{٢}{م^٢-١٥م+٥٤}$

تمرين كتابي

حلّ وامتحن ما يأتي :

(١) $\frac{ى^٢-ى+١}{ى-١} = ٢ى - \frac{ى^٢+ى+١}{ى+١}$ (٢) $\frac{م-٢}{٢م+٦}$

$- \frac{١+٢٤/م^٢}{م^٢-٩} = \frac{م+٣}{م^٢-٩}$ (٣) $\frac{م}{م+٢} + \frac{٤}{م+٦} = ١$

(٤) $\frac{م^٢+١}{(م-٢)م} = \frac{م-٢}{م-١}$ (٥) $\frac{٦م+٨}{٢م^٢+١} - \frac{٣٨+م^٢}{م+١٢} = ١$

(٦) $\frac{٦ل+٧}{٩ل+٦} - \frac{١}{١٢} + \frac{٥ل-٥}{١٢ل+٨}$

(٧) $\frac{٤}{م+٣} - \frac{٣}{م+١} = \frac{٥}{٢م^٢+٦} - \frac{٣\frac{١}{٢}}{٢م^٢+٣}$

(٨) $\frac{٣}{٤-٢م^٢} + \frac{٣٠}{٨(١-م^٢)} = \frac{٣}{٢-م} + \frac{٥}{٢-٢م^٢}$

(٩) $\frac{١}{٢ل-٢} + \frac{٤}{ل+١} = \frac{١١\frac{١}{٢}}{ل+١} + \frac{٤}{١-ل^٢}$

(١٠) $\frac{م+١}{٣م^٢-٣} - \frac{٧+م^٢}{٩-٤م^٢} = \frac{٣}{٣م^٢+٣} - \frac{م-١}{٦-٤م^٢}$

(١١) $\frac{م}{م-٣} - \frac{م+١}{م-١} = \frac{م-٨}{م-٦} - \frac{م-٩}{م-٧}$

(١٢) $\frac{م+٥}{م+٤} - \frac{م-٦}{م-٧} = \frac{م-٤}{م-٥} - \frac{م-١٥}{م-١٦}$

(١٣) $\frac{ل-٧}{ل-٩} - \frac{ل-٩}{ل-١١} = \frac{ل-١٣}{ل-١٥} - \frac{ل-١٥}{ل-١٧}$

(١٤) $\frac{ل+٣}{ل+٦} - \frac{ل+٦}{ل+٩} = \frac{ل+٢}{ل+٥} - \frac{ل+٥}{ل+٨}$

(١٥) $\frac{ب}{ك} - ٥ = \frac{ب}{٣ك} + ٧$ (١٦) $\frac{ب}{ك} - ٣ت = \frac{س}{٣ك} + ٥$

(١٧) $\frac{ل}{ب س} + \frac{ل}{ت س} = \frac{ت}{ب س} + \frac{١}{س}$

(١٨) $\frac{ك}{ب ت} + \frac{ب}{ت س} = \frac{ك}{ت س} + \frac{١}{ت}$

(١٩) $\frac{ب^{٢}}{س م} - \frac{س^{٢}}{ب م} = \frac{١}{ب} - \frac{١}{س}$

(٢٠) $\frac{م-ت}{ب-م} = \frac{م-ب}{ت-م}$ (٢١) $٢٧^{٢}١ل - ٧٤^{٢}١ = ٨٩^{٢}٣ + ٢٦^{٢}٤$

(٢٢) $\frac{٩^{٢}ك - ١^{٢}}{١^{٢}٧} = \frac{٥^{٢}٣ - ٣٥^{٢}ك}{٩^{٢}ك}$ (٢٣) $\frac{٣م-٢}{٤^{٢}م-٣^{٢}} = \frac{٤^{٢}م-٦^{٢}}{٦٠^{٢}م-٧٠^{٢}}$

مسائل منثورة

اجب ما استطعت شفاهًا

(١) سيارة تسير م ميلاً في الساعة فكم ميلاً تسير في د/س ساعة ؟

(٢) ثمن ل ليمونة غ غرشًا فكم ليمونة تشتري بـ ج ليرة ؟

(٣) رجل يسير ذ ذراعاً بـ د دقيقة فكم من الوقت يسير م/ل ذراعاً ؟

(٤) ماذا تضيف الى ك ليكون المجموع ى/ل ؟

(٥) لدى رجل من العلف ما يكفي ب بقرة ى يومًا فكم يومًا يكفي ف بقرة ؟

(٦) وزن مزيج من النحاس والفضة ١٢٠ اوقية فاذا كان وزن الفضة فيه ٨ اواق وزيد عليه ع اوقية فضة فكم جزءًا منه فضة ؟

(٧) مجموع ثلث عدد وربعه وخمسه ٣٨٣ فما هو العدد ؟

(٨) اذا زدت على عدد ١٥٪ منه كان المجموع ٢٠٧٠ فما هو العدد ؟

(٩) ما العدد الذي تضيفه الى كل من صورة ومخرج الكسر ١٥/٥٥ ليصير ١/٢ ؟

(١٠) ما العدد الذي تطرحه من كل من صورة ومخرج الكسر ٤٥/٤٧ ليصير ٢/٣ ؟

(١١) انبوب يملأ حوضًا بـ ٤٨ دقيقة وآخر يملأه بساعة و١٢ دقيقة فاذا فتح الانبوبان معًا ففي كم من الوقت يملآن الحوض ؟

(١٢) انبوبان يملآن حوضًا بـ ٣٧ و٥٤ دقيقة على التوالي وثالث يفرغه بـ ٣٦ دقيقة فاذا كان الحوض فارغًا وفتح الثلاثة معًا ففي كم من الوقت يمتلىء الحوض ؟

(١٣) ما العدد الذي تجمعه الى صورة الكسر ١٩/٢٦ وتطرحه من مخرجه ليصير ٢/٣ ؟

(١٤) ٩٠ ٪ من الريال الامير كاني ذهباً والباقي نحاساً فكم ليبرة ذهباً تضيف الى سبيكة وزنها ٢٤ ليبرة ومقدار الذهب فيها ٧٥ ٪ لتصير صالحة للسك ؟

(١٥) حلّ تلميذ ٣/٤ المسائل الجبرية المفروضة حلاً صحيحاً ولو جرّب ٩ وحلّ منها ٨ لكانت علامته ٧٥ ٪ فكم كان عدد المسائل المفروضة ؟

(١٦) مجموع عددين ١٦٢ واذا قسمت الاكبر على الاصغر كان الخارج ٢ والباقي ١٤ فما العددان ؟

ملاحظة : لتكن ك العدد الاصغر

فاذاً ١٦٢ — ك العدد الاكبر

وعليه $\frac{١٦٢ - ك}{ك} = ٢ + \frac{١٤}{ك}$

(١٧) مجموع عددين ١٤٩ واذا قسمت الاكبر على الاصغر كان الخارج ٤ والباقي ٤ فما العددان ؟

(١٨) مجموع عددين ١٥١٦ واذا قسمت الاكبر على الاصغر كان الخارج ٥ والباقي ١٢٠ فما العددان ؟

(١٩) سارت سيارتان من زحلة الى تدمر مسافة ٢٤٠ ميلاً في ذات الوقت وكانت الاولى أسرع من الثانية بـ ١٠ اميال في الساعة وحين وصولها الى تدمر رجعت الى زحلة والتقت بالثانية على بعد ١٩٢ ميلاً منها (زحلة) فكم كانت سرعة كل منهما ؟

(٢٠) خرجت سيارتان في ذات الوقت من مدينة ب الى مدينة د والمسافة بينهما ١٨٠ ميلاً فاذا كانت الثانية اسرع من الاولى بـ ٨ اميال في الساعة وحينما وصلت

الى د رجعت والتقت بالاولى على بعد ٢٠ ميلاً عن د فكم كانت سرعة كلٍّ منهما ؟

(٣١) سار سائق سيارة مسافة ١٢٠ ميلاً ولما رجع على ذات الطريق زاد معدل سرعته ١٠ اميال فوصل بساعتين اقل مما اقتضى لذهابه . فكم كانت سرعته ذهاباً وإياباً ؟

(٣٢) سار توفيق وسليم في ذات الوقت من مدينتين المسافة بينهما ٢٦٠ ميلاً فالتقيا في منتصف الطريق وكان توفيق يسير اسرع من سليم بثلاثة اميال في الساعة ولكنه حدث له حادث منعه ساعتين عن السير فكم كانت سرعة كل منهما ؟

(٣٣) مجري يجذف ٤ اميال في الساعة في الماء الساكن فاذا جذف عكس مجرى النهر الى مسافة معلومة اقتضى له ٥ ساعات ولكنه يعود الى مركزه بثلاث ساعات فكم تكون سرعة المجرى ؟

ملاحظة : لتكن ك سرعة المجرى في الساعة فاذاً ٤ − ك سرعة المجري اذا سار عكس المجرى و٤+ك سرعته مع المجرى

(٣٤) مجري يجذف ٤½ اميال في الساعة في الماء الساكن فاذا سار مسافة معينة في نهر سرعته ميلان في الساعة ورجع الى ذات المكان اقتضى له ٨ ساعات فكم كانت المسافة التي قطعها ؟

(٣٥) يسير قارب بخاري ٣ اميال عكس مجرى نهر سرعته ٣ اميال في الساعة في الوقت الذي يلزمه ليسير ٨ اميال مع المجرى فكم تكون سرعة القارب في الماء الساكن ؟

(٣٦) اذا قذفت قنبلة بسرعة تفوق السرعة في الثانية س = $\sqrt{٢ ج ش}$ قدماً في الثانية حيث س = السرعة و ج = ٣٢ قدماً وش (نصف قطر الارض) = ٤٠٠٠ ميل فكم تكون اقل كمية لتلك السرعة ؟

الفصل الحادي عشر

المعادلات الآنية البسيطة المتعددة المجاهيل

القسم الاول

١٦٦. ذكرنا سابقاً ان المعادلة البسيطة هي معادلة من الدرجة الاولى وقد تكون ذات مجهول واحد او اكثر ولكن يشترط فيها بعد بسطها وحذف المخارج ان لا يظهر فيها حدّ يكون فيه مجموع قوى المجاهيل اكثر من واحد

مثالهُ ك + ى − ٥ معادلة بسيطة من الدرجة الاولى . لماذا؟

وك ى + ى − ٥ ليست معادلة بسيطة من الدرجة الاولى. لماذا؟

١٨٧. اذا تأملنا المعادلة ك + ى = ٥ فاننا نجد انها تشتمل على مجهولين ومنها نستنتج ان ى = ٥ − ك وعليهِ كلما وضعنا قيمة للرمز ك نتج قيمة للرمز ى تابعة لقيمة ك او مقابلة لها فاذاً يمكننا ان نجد عدداً غير متناهٍ من الكميات لكلٍّ من ك و ى تحقق بها المعادلة المفروضة كما يظهر من الجدول الآتي :

اذا كانت ك =	−٣	−٢	−١	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	...الخ
فاذاً ى =	٨	٧	٦	٥	٤	٣	٢	١	٠	−١	...الخ

فاذا اخذنا ايّ زوج منها مثل − ١ و ٦ كان لنا − ١ + ٦ = ٥ . وبما ان عدد هذه الازواج غير متناهٍ فالمعادلة يقال لها معادلة غير محدودة او "سيّالة"

١٦٨. المعادلات الآنية. اذا وجد لدينا معادلة اخرى مثل ٢ ك − ى = ٤ زيادة على المعادلة ك + ى = ٥ وكانت قيمة ك في نفس الوقت واحدة في المعادلتين وكذلك قيمة ى فالمعادلتان آنيتان

فالمعادلات الآنية هي معادلات عددها قدر عدد المجاهيل التي فيها وتتحقق اذا عوّض عن المجاهيل بكميات واحدة في نفس الوقت

مثال ١. ل − م + ٢ ن + ٥ ى = ٢٧ ..... (١)

ل + م + ٢ ن − ى = ٨ ..... (٢)

٢ ل − ٢ م − ن + ٢ ى = ٦ ..... (٣)

٢ ل + ٤ م − ٢ ن + ى = ٥ ..... (٤)

فانها معادلات آنية لانها اربع بقدر المجاهيل وتتحقق بالتعويض عن ى = ٤ ون = ٢ وم = ١ ول = ٢

ونحلّ المعادلات حينما نستخرج قيم المجاهيل

١٦٩. الحذف ويقال له الاسقاط والاخراج هو طريقة لضم معادلتين مشتملتين على مجهولين لتحصيل معادلة واحدة تحوي مجهولاً واحداً. وبكلام أعم هو ضم عدة معادلات آنية لانقاصها معادلة واحدة ومجهول واحد

١٧٠. حلّ المعادلات بطريقة الحذف على نوعين الاول الجمع والطرح والثاني التعويض وهذه تمثل بالامثلة الآتية :

مثال ١. حلّ : ٣ ك + ٢ ى = ٢٥ (١)

٢ ك − ٢ ى = −٦ (٢)

اضرب (١) في ٢	٤ك + ٦ى = ٧٠	
اضرب (٢) في ٣	٩ك − ٦ى = ١٨	
اجمع المعادلتين	١٣ك = ٥٢	
اقسم على ١٣	ك = ٤	

عوّض عن ك بقيمتها ٤ في (١)

فلنا ٢×٤ + ٣ى = ٢٥

ومنها ٣ى = ٢٧

ى = ٩

الامتحان: عوّض عن ك ٤ وعن ى ٩

فلنا ٢×٤ + ٣×٩ − ٨ = ٢٧ − ٢٥

و ٣×٤ − ٢×٩ − ١٢ = ١٨ − ٦

هذه طريقة الحذف بالجمع وهي ثم نجعل مسميات ى عدداً واحداً او وحيدها وذلك ان تجد معدودها الاصغر وتضرب كل معادلة في خارج قسمة المعدود الاصغر على مسمى ى في تلك المعادلة ثم تجمع كما رأيت

مثال ٣. حلّ: ١٢ك + ٥ى = ٧٥ (١)

٩ ك − ٤ى = ٣٣ (٢)

لحذف ك بطريقة الطرح اضرب معادلة (١) في ٣ و (٢) في ٤

٣٦ك + ١٥ى = ٢٢٥	(٣)
٣٦ك − ١٦ى = ١٣٢	(٤)
اطرح (٤) من (٣) ٣١ى = ٩٣	
ي = ٣	

وبالتعويض عن ى ٣ في (١) نجد ك = ٥

يمتحن الطالب العمل

مثال ٣. حلّ ك+٥ى = −١١ (١)

٢ك−٣ى = ١٢ (٢)

لنا من (١) ك = −١١−٥ى (٣)

عوّض عن ك بـ −١١−٥ى في (٢)

٢(−١١−٥ى)−٣ى = ١٧ (٤)

وبالبسط والاصلاح نستخرج ى = −٣ (٥)

عوّض عن ى قيمتها −٣ في (٣) ينتج ك = ٤

ليمتحن الطالب العمل

تمرين كتابي

حلّ ما يأتي بالحذف بالجمع او بالطرح وامتحن العمل

(١) ك+ى = ٦ (٢) ك+ى = −١ (٣) ك+٢ى = ٧

ك−ى = ٢ ك−ى = ٥ ك−ى = −٢

(٤) ك+ى = ٨ (٥) ك−ى = ١ (٦) ٢ك+ى = ٧

ك+٣ى = ١٢ ٢ك+ى = ١٤ ٣ك−ى = ٣

(٧) ٥ل+٢م = ١٢ (٨) ٢ل−٣م = ١٨ (٩) ٣ك+٢ى = ٣٨

٣ل+م = ٧ ٣ل+٢م = ١٤ ٢ك−ى = ٢٣

(١٠) ٤ك+٣ى = ١١ (١١) ٧ك+٥ى = ٣٨

٥ك−٢ى = ٨ ٤ك−٣ى = ١٠

(١٢) ٥ك + ٧ى = ٢٤
٤ك – ى = ٢٥

(١٣) ٥ك – ٢ى = ١١
٣ك + ٥ى = ١٢

(١٤) ٨ك + ٣ى = ٤٣
٣ك + ٥ى = ٢٠

(١٥) ٧ل + ٣م = – ٨
٥ل + ٣م = – ١

(١٦) ٩ل – ٨م = ٥
١٥ل + ١٢م = ٣

(١٧) ٣ل – ٣م – ١ = ٠
ل + م = ٣

(١٨) ٥ل + ٤م = ١٠
٦ل – ٣م = – ٢٧

(١٩) ٩م + ٥ن = ١٠٩
٧م – ١٠ن = ٥٧

(٢٠) ٣ع – ٣م = ١٢
٤ع + ٦م = ٦٨

(٢١) ٥ك – ٧ل = ٧٨
٣ك + ١٣ل = – ١٠٨

(٢٢) ٣م + ٥ن = ١٥
م – ٤ن = ١

(٢٣) ١٦م + ٣ن = ١١
٣٠م = ٣٠ – ٧ن

(٢٤) ١١ك = ٨ل + ١٣
٥ك = ٧ل + ١٦

حلّ ما يأتي بالتعويض وامتحن العمل :

(٢٥) ٣ك + ٢ى = ١٢
ى = ٣ك – ١

(٢٦) ٥ك + ٣ى = ٣٩
ى = ٧ – ك

(٢٧) ٣ك – ٥ى = ١
ى = ٣ك – ٣

(٢٨) ٨ل – ٣م = ٣٠
م = ل – ٥

(٣٩) ل = ٢م − ١١
٢ل + ٧م − ١٩

(٤٠) م − ٢ن = ١
٢م − ن = ٥

(٤١) ل + ٣م = ١٤
٢ل − م = ٣

(٤٢) ٢ل + ٥م = ٦١
١٠ل − م = ٦٢

(٤٣) ٢ل + ٣م = ١
٥ل − ٤م = ٣

(٤٤) ٩ل + ٥ى = − ٢٨
ل = ٣ى + ٤

(٤٥) ٧ل + ٤م = ٤٠
٢م = ل + ٢

(٤٦) ٢ل + ٣م = ١
٢ل + ٤م = ٢

١٧١ . تحلّ المعادلات الكسرية بتحويل مقسمات المجاهيل الى اعداد صحيحة أولاً و بعدها تحلّ المعادلات بالطرق التي بسطناها قبلاً

مثال ١. حلّ : $\frac{٢}{٣}ك + \frac{٢}{٣}ى = ٢٤$ (١)

$\frac{٢}{٣}ك + \frac{٢}{٧}ى = ٢١$ (٢)

اضرب (١) في ١٠ و (٢) في ٢١ فيحصل

$٤ك + ١٥ى = ٦٨$ (٣)

و $٧ك + ٩ى = ٥٠$ (٤)

وتحلّ المعادلتين (٣) و (٤) اما بالجمع والطرح او بالتعويض

تمرين كتابي

حلّ ما يأتي وامتحن :

(١) $\frac{١}{٢}ل + \frac{٢}{٣} = ١٠$
$\frac{١}{٢}ل + \frac{٢}{٣} = ١٠$

(٢) $\frac{١}{٢}ل - \frac{٢}{٤}ى = - ١٢$
$\frac{٢}{٣}ل + \frac{٥}{٩}ى = ٨$

(٣) $\frac{٤}{٣}ل + \frac{٢}{٣}م = ٨$
$\frac{١}{٢}م - \frac{٣}{٢}ل = ٥$

(٤) $\frac{٥}{٦}ك + \frac{٣}{٢}ى = ٥$
$ك - ى = ٤$

(٥) $ك - ى = ٥$
$\frac{٤}{٣}ك - \frac{٥}{٦}ى = ٢$

(٦) $\frac{٧}{٦}ل + \frac{٢٥}{٦}م = ١$
$ل + \frac{٣}{٢}م = ٤$

(٧) $ل = ٣م$
$\frac{٢}{٣}ل + م = ٣٤$

(٨) $\frac{١}{٢}ل + \frac{١}{٣}م = ٥$
$\frac{٢}{٣}ل + \frac{١}{٣}م = ٥$

(٩) $\frac{١}{٤}ل - \frac{١}{٦}م = ١$
$\frac{١}{٣}ل - \frac{١}{٤}م = ١$

(١٠) $٥ل - \frac{٣}{٢}م = -\frac{١}{٢}$
$\frac{٤ل + ١}{٦} = \frac{٣ - ٤}{٤}$

(١١) $\frac{٣ + ٣ن}{٥} - \frac{٣ن}{٣} = \frac{١١}{١٥}$
$\frac{٣٤ - ن}{٣} + م = ٤$

(١٢) $\frac{٣ + ن}{٣} + \frac{٣ - ن}{٣} = \frac{٣}{٣}$،
$\frac{٣٣ - ٣ن}{٥} + ٣م = ٣$

(١٣) $\frac{٣ك}{٣} + \frac{٣}{٤}ى = ١١\frac{١}{٢}$
$\frac{٤ك}{٥} + \frac{٣ى}{٧} = \frac{٧٦}{٣٥}$

(١٤) $\frac{٧ل + ٣}{٣ل - ٣} = \frac{٣}{٤}$
$٣ل - ٥م = -٣٣$

(١٥) $\frac{٥ك + ٣}{٣ك - ٥ى} = -١$
$\frac{ك}{٣} + ى = \frac{٣}{٢}$

(١٦) $\left\{\begin{array}{l} \frac{٨}{ك} - \frac{٩}{ى} = ١ \\ \frac{١٠}{ك} + \frac{٦}{ى} = ٧ \end{array}\right.$ في هذا العمل وما هو على شاكلته نعتبر ان مقلوبي ك و ى المجهولان . ونحل المعادلات

وحيد صورة المجهول الذي نرغب حذفه . فاذا ضربنا الاولى في ٣ والثانية في ٤ وجمعنا فاننا نحذف المجهول ى كما ترى ادناه

$\frac{١٦}{ك} - \frac{١٨}{ى} = ٣$
$\frac{٣٠}{ك} + \frac{١٨}{ى} = ٣١$

وبالجمع $\frac{ك}{٤٦} = ٢٢$ فاذاً ك = ٢ وبالتعويض ى = ٢

(١٧) $\frac{١}{ك} + \frac{١}{ى} = \frac{٦}{٥}$ (١٨) $\frac{٢}{ك} + \frac{٢}{ى} = ٢$

$\frac{١}{ك} - \frac{١}{ى} = \frac{٤}{٥}$ $\frac{٤}{ك} - \frac{٥}{ى} = \frac{١}{٢}$

(١٩) $\frac{٢}{م} + \frac{٤}{ن} = ١$ (٢٠) $\frac{٥}{ل م} + \frac{٦}{م} = ٢$ (٢١) $\frac{٦}{م} - \frac{٧}{ن} = ٢$

$\frac{٤}{ن} - \frac{٥}{م} = \frac{١٩}{٣}$ $\frac{١٥}{ل م} + \frac{٣}{م} = ٤$ $\frac{٢}{م} + \frac{١٤}{ن} = ٣$

(٢٢) $\frac{١٢}{ل م} - \frac{٤}{م} = ٢$ (٢٣) $\frac{٥}{ل م} + \frac{١٦}{م} = ٧٩$

$\frac{٣}{ل م} - \frac{٢}{م} = ٠$ $\frac{١٦}{ل م} - \frac{١}{م} = ٤٤$

(٢٤) $\frac{٥}{ل م} + \frac{٣}{م} = ٣٠$ (٢٥) $\frac{٢}{ل م} + \frac{٣}{م} = \frac{١}{٢}$

$\frac{٩}{ل م} - \frac{٥}{م} = ٢$ $\frac{٥}{ل م} + \frac{٢}{م} = \frac{١٤}{٣}$

١٧٣. المعادلات الحرفية. تحلّ المعادلات الآتية الحرفية غالباً بطريقة الحذف بالجمع او بالطرح لانها اسهل واخصر

مثال ١. $ت ك + ب ى = س$ (١)

$د ك + ح ى = ج$ (٢)

اضرب (١) في ح $ت ح ك + ب ح ى = ح س$ (٣)

اضرب (٢) في ب $ب د ك + ب ح ى = ب ج$ (٤)

(٣) – (٤) $(ت ح - ب د) ك = ح س - ب ج$

$\therefore ك = \frac{ح س - ب ج}{ت ح - ب د}$ الجواب

اضرب (١) في د $ت د ك + ب د ى = د س$ (٥)

اضرب (٢) في ت $ت د ك + ت ح ى = ت ج$ (٦)

(٥) – (٦) $(ب د - ت ح) ى = د س - ت ج$

$\therefore ى = \frac{د س - ت ج}{ب د - ت ح}$ الجواب

تمرين كتابي

حلّ المعادلات الآتية:

(١) $ك + ى = ٤ ب$ (٢) $ل + م = ٥ د$ (٣) $م + ن = س$

$ك - ى = ب$ $ل - م = د$ $م - ن = د$

(٤) $٢ ل - ٣ م = د$ (٥) $د ك + د ى = ٢ س$ (٦) $٤ ل + د ى = ب$

$٣ ل + ٤ م = ح$ $د ك - د ي = ٢ ش$ $٥ ل + ب ى = د$

(٧) ب ل + م = ب (٨) د ك + ب ى = ١ (٩) ت ل − ب م = ١
د ل + ٢ م = د ك + ى = ١ د ل + ح م = ١

(١٠) ت م − ب ن = س (١١) ك$^{\frac{1}{2}}$ + ى$^{\frac{1}{2}}$ = ت (١٢) ى^{ت} + ك^{ب} = د
د م − ح ن = ج ك^{٢} − ى$^{\frac{1}{2}}$ = ب ى^{ت} − ك^{ب} = س

(١٣) س م + د ن = د + س (١٤) ت^{ك} + ب^{ى} = ب ت$^{\frac{1}{2}}$
د ن − س م = د − س د^{ك} − ح^{ى} = د ح$^{\frac{1}{2}}$

(١٥) ت^{ك} + ب$^{\frac{1}{2}}$ ى = ٢ (١٦) ت^{ك} − ب^{ى} = ١
د^{ك} = س^{ى} ب^{ك} + ت^{ى} = ب^{ت}

١٧٣. المعادلات الآنية التي تشمل ثلاثة مجاهيل او اكثر. مر معنا قبلاً انهُ يقتضي وجود معادلتين اذا كنا نبحث عن قيمة مجهولين وهكذا اذا كانت المجاهيل ثلاثة وجب ان يكون عدد المعادلات ثلاثاً. وبكلام آخر يجب ان يكون عدد المعادلات بقدر عدد المجاهيل

وطريقة العمل ان نحذف احد المجاهيل من اي معادلتين من المعادلات الثلاث ثم نحذف نفس المجهول من معادلتين اخريين فتحصل معادلتان بمجهولين تحلان حسب الطرق السابقة ثم نستخرج قيمة المجهول الثالث بطريقة التعويض في اي معادلة من المعادلات الثلاث

مثال ١. حل ٢ ك + ٤ ى − ٥ ل = ٢٢ (١)
٤ ك − ٥ ى + ٣ ل = ١٨ (٢)
٥ ك − ٣ ى − ٤ ل = ٢ (٣)

اذا اردنا ان نحذف ل فاننا نضرب (١) في ٣ و(٢) في ٥

٩ ك + ١٢ ى − ١٥ ل = ٩٦ (٤)

٢٠ ك − ٢٥ ى + ١٥ ل = ٩٠ (٥)

اجمع (٤) و(٥) ٢٩ ك − ١٣ ى = ١٨٦ (٦)

اضرب ايضاً (٣) في ٤ و(٤) في ٣

١٦ ك − ٢٠ ى + ١٢ ل = ٧٣ (٧)

١٥ ك − ٩ ى − ١٢ ل = ٦ (٨)

اجمع (٧) و(٨) ٣١ ك − ٢٩ ى = ٧٨ (٩)

ويحل المعادلتين (٦) و(٩) ينتج ك = ١٠ وى = ٨ وبالتعويض في (١) نجد ل = ٦

اطلب من التلميذ ان يحقن العمل

تمرين كتابي

حلّ ما يأتي:

(١) ل + م + ن = ٦ (٢) ل + ٢م + ن = ٧ (٣) ل + ٢م + ٢ن = ١١

٢ل + ٢م + ن = ١٠ ٢ل + م + ٣ن = ١٤ ٢ل + م + ن = ٧

٢ل + م + ٣ن = ١٤ ل + ٣م − ن = ٢ ٣ل + ٤م + ن = ١٤

(٤) ل + ٤م + ٣ن = ١٧ (٥) ٥ل − ٦م + ٢ن = ٥

٣ل + ٣م + ن = ١٦ ٨ل + ٤م − ٥ن = ٥

٢ل + ٢م + ن = ١١ ٩ل + ٥م − ٦ن = ٥

(٦) ٢ل − م + ن = ٣ (٧) ٣ل + ٤م + ن = − ١

٣ل + ٢م − ن = ٤ ٢ل − م + ٢ن = − ١

٤ل + ٣م − ٢ن = ٤ ل + ٣م − ن = ٢

(٨) ك + ى = ٤ (٩) ٢ك + ٣ى = ٧ (١٠) ل + م + ن = ١
ك + ل = ٦ ٣ى + ٤ل = ٩ ل = ١٠ ن = ٧
ى + ل = ٨ ٥ك + ٦ل = ١٥ م = ٢ل = ١١

(١١) ٢ل + م + ن = ١٦ (١٢) ل = ٢م + ٣ن = ٢
ل + ٢م + ن = ٩ ٢ل = ٣م + ن = ١
ل + م + ٢ن = ٣ ٣ل = م + ٢ن = ٩

(١٣) ٣ل = ٤م = ٦ن = ١٦ و ٤ل = م = ن = ٥ و ل = ٣م + ٢ن = ٣

(١٤) $\frac{م+ن}{٤} = \frac{ل+ن}{٣} = \frac{ل+م}{٢}$ و ل + م + ن = ٣٧

مسائل شفهية

(١) كم غرشاً في ل ليرة وغ غرشاً ؟

(٢) سرعة نهر ن ميلاً في الساعة وسرعة قارب بخاري ق ميلاً فكم تكون سرعة القارب اذا جرى مع المجرى ؟ وكم اذا جرى عكس المجرى ؟

(٣) اشترى انيس من مخزن صرافيان ق قلم رصاص مما سعرهُ غ غرشاً فاذا دفع ليرة واحدة كم غرشاً يرجع له الصراف ؟

(٤) رجل اتم م/ل جزءاً من عمل ما فكم جزءاً يبقى منهُ

(٥) ارسم مستطيلاً واجعل طولهُ ط وعرضهُ ع . كم يكون محيطهُ

ارسم ايضاً مستطيلاً آخر أطول من الاول بثلاثة واقل عرضاً منهُ بخمسة كم تكون مساحتهُ ؟

لدينا عددان ك و ى فاذا كان ك اكبرهما فكيف تعبر جبريًا عن قولك

(٦) الفرق بين العددين خمسة ؟

(٧) احد العددين يزيد عن الآخر ج ؟

(٨) ثلاثة اضعاف الاصغر تزيد عن ضعفي الاكبر ٢ ؟

(٩) الفرق بين العددين يساوي سدس مجموعهما ؟

(١٠) خارج قسمة الاكبر على الاصغر ٧ والباقي ١٥ ؟

١٧٤. يشترط في حل المسائل بواسطة المعادلات الآتية ان يحتوي منطوق المسألة على فروض مستقلّ بعضها عن بعض [اي لا يكون احدها ناتج من الآخر] وان يكون عدد هذه الفروض قدر عدد الكميات المجهولة المطلوب استعلام مقاديرها وبكلام آخر ان نتمكن من تحصيل معادلات آنية عددها قدر عدد المجاهيل المراد معرفة قيمتها

مثال ١: ما عددان مجموعهما ٦٦ والفرق بينهما ٢٤ ؟

افرض ك اكبر العددين و ى اصغرهما

فاذًا ك + ى = ٦٦ ... (١)

ك – ى = ٢٤ ... (٢)

وبحل هاتين المعادلتين ينتج ك = ٥٠ و ى ١٦

مثال ٢. ما الكسر الذي اذا اضيف ٢ الى كل من صورته ومخرجه صار $\frac{1}{2}$ ولكن اذا اضيف ٧ الى كل من الصورة والمخرج صار $\frac{2}{3}$ ؟

الاعداد التي نتعاطى بها الرموز

(١) الكسر المجهول — $\frac{ص}{م}$

(٢) العدد الاول الذي نضيفه الى الصورة والمخرج — ٢

(٣) الكسر الناتج من ذلك — $\frac{ص+٢}{م+٢}$

(٤) قيمة الكسر الناتج — $\frac{١}{٢}$

(٥) العدد الثاني المضاف الى الصورة والمخرج — ٧

(٦) الكسر الناتج منه — $\frac{ص+٧}{م+٧}$

(٧) قيمة الكسر الناتج — $\frac{٣}{٤}$

المساواة بين الاعداد

(٣) — (٤) و (٦) — (٧)

اي $\frac{ص+٢}{م+٢} - \frac{١}{٢}$ و $\frac{ص+٧}{م+٧} - \frac{٣}{٤}$

وبحل هذه المعادلات ينتج ص — ٢ وم — ٨

فاذا $\frac{ص}{م} - \frac{٢}{٨}$ الجواب

تمرين كتابي

(١) ما عددان مجموعهما ٤١ والفرق بينهما ٣٥ ؟

(٢) ما عددان الفرق بينهما ٢٧ ومجموعهما ٧٣ ؟

(٣) ما عددان مجموعهما ١٨٠ واكبرهما يزيد ٤٠ عن ثلاثة اضعاف الاصغر ؟

(٤) ما عددان الفرق بينهما ٦ واذا اضفت ٣ الى الاكبر صار ضعفي الاصغر ؟

(٥) ما عددان ثلث مجموعهما ٣٨ ونصف الفرق بينهما ٨ ؟

(٦) ما عددان $\frac{1}{19}$ من مجموعهما ٨ والفرق بينهما ٦٠؟

(٧) ما عددان مجموعهما ٤٤ ونصف الاول مع ثلث الثاني ١٤؟

(٨) ما الكسر الذي اذا اضفت ٣ الى صورته ساوى $\frac{1}{2}$ واذا اضفت ١ الى مخرجه ساوى $\frac{1}{4}$؟

(٩) ما الكسر الذي اذا اضفت ١ الى صورته ساوى $\frac{1}{2}$ واذا طرحت ١ من مخرجه ساوى $\frac{1}{4}$؟

(١٠) ما الكسر الذي اذا ضاعفت صورته واضفت ٥ الى مخرجه ساوى $\frac{7}{8}$. واذا طرحت ١ من صورته واضفت ٧ الى مخرجه ساوى $\frac{1}{2}$؟

(١١) ثمن رطلين طحين و٥ ارطال سكر ٢٢٠ غرشاً وثمن ٥ ارطال طحين و ٣ ارطال سكر ٢٦٥ غرشاً فكم ثمن رطل الطحين ورطل السكر؟

(١٢) اجرة ٤ رجال و٣ أولاد ١٨ ليرة في اليوم واجرة ٣ رجال و٤ اولاد ١٧ ليرة فكم اجرة الرجل والولد؟

(١٣) اشترت سيدة ٤ امتار حرير و٧ امتار كتان بـ ١٧٫٧٠ ليرة ولو ابتاعت ٥ امتار حرير و $\frac{1}{2}$ ٥ امتار كتان لكانت دفعت ذات الثمن فكم كان ثمن متر الحرير والكتان؟

(١٤) ثقل قدم مكعبة من الحديد وقدم مكعبة من الرصاص ١١٨٠ ليبرة ولكن ثقل ٣ اقدام مكعبة من الحديد تزيد ٤٠ ليبرة عن ثقل قدمين مكعبتين من الرصاص فكم يكون ثقل القدم المكعبة من الحديد ومن الرصاص؟

(١٥) عدد مؤلف من رقمين مجموعهما ٧ واذا اضفت اليه ٢٧ انعكس العدد فما هو؟

نفرض ك رقم الاحاد وع رقم العشرات

فاذا ك + ع = ٧ ..... (١)

ولكون ع رقم العشرات فقيمتها اذاً ١٠ ع وعليه يمثل العدد بـ ١٠ ع + ك وعكس العدد يكون ١٠ ك + ع

فاذاً ١٠ ع + ك + ٢٧ = ١٠ ك + ع ..... (٢)

وبالمقابلة والبسط ك - ع = ٣ .... (٣)

وبحلّ (١) و (٢) ينتج ك = ٥ و ع = ٢

فالعدد اذاً ١٠ × ٢ + ٥ = ٢٥ الجواب

(١٦) عدد مؤلف من رقمين مجموعهما ٦ واذا اضفت اليه ٣٦ انعكس العدد فما هو؟

(١٧) مجموع عدد مكوّن من رقمين وعكس العدد ١٢١ ورقم العشرات يزيد ٧ عن رقم الاحاد فما هو العدد؟

(١٨) مجموع رقمي عدد ١٣ والفرق بينه وبين عكسه ٤٥ فما هو العدد؟

(١٩) اذا قسمت عدداً على نصف مجموع رقميه كان الخارج ٧ واذا طرحت منه ٣٦ كان الباقي عكس العدد فما هو العدد؟

(٢٠) اذا اضفت ٨ الى عدد مؤلف من رقمين كان المجموع ٨ اضعاف مجموع رقميه الاّ ١ ولكن رقم منزلة العشرات ضعف رقم منزلة الآحاد فما هو العدد؟

(٢١) عدد مؤلف من ٣ ارقام مجموعها ١٤ فاذا كان رقم منزلة الآحاد يزيد ٢ عن مجموع رقم منزلة المئات ورقم منزلة العشرات وكان رقم منزلة العشرات نصف رقم منزلة الآحاد فما هو العدد؟

(٢٢) عدد مركب من ثلاثة ارقام منزلة الآحاد فيه صفر واذا وضع رقم العشرات ورقم المئات كل موضع الآخر نقص العدد ١٨٠ واذا وضع بدل رقم

المئات نصفه وحلّ رقم منزلة العشرات ورقم منزلة الآحاد كل محل الآخر نقص العدد ٤٥٤ فما هو العدد ؟

(٣٣) منذ ٦ سنوات كان عمر يوسف ١٢ ضعف عمر ابنه سعيد ولكن بعد مضي ٣ سنوات (منذ الآن) يصير عمرهُ ٣ اضعاف عمر سعيد فكم عمر كل منهما الآن ؟

(٣٤) اربعة اضعاف عمر بطرس يزيد ٣٠ سنة عن عمر احمد وثلث عمر احمد اقل من عمر بطرس بسنتين فكم عمر كل منهما ؟

(٣٥) $\frac{1}{11}$ من عمر امين يزيد سنتين على $\frac{1}{7}$ عمر بدر وضعف عمر بدر يساوي ما كان يساويه عمر امين منذ ١٢ سنة فكم يكون عمر كل منهما الآن ؟

(٣٦) لدى بائع نوعان من الطحين فاذا كان ثمن الرطل من النوع الاول ٢٤ غرشاً ومن الثاني ٢٢ غرشاً فكم رطلاً يمزج من كل من النوعين ليحصل على ١٠٠ رطل ما ثمنهُ ٢٣٨٨ غرشاً ؟

الاعداد التي نتعاطى بها		الرموز
(١) عدد ارطال النوع الاول	—	ك
(٢) " " " الثاني	—	ى
(٣) ثمن ارطال النوع الاول	—	٢٤ ك
(٤) " " " الثاني	—	٢٢ ى
(٥) عدد ارطال المزيج	—	١٠٠
(٦) ثمن ارطال المزيج	—	٢٣٨٨٠

المساواة بين الاعداد

(١) + (٢) — (٥) او ك + ى — ١٠٠

(٣) + (٤) — (٦) او ٢٤ ك + ٢٢ ى — ٢٣٨٨٠

مطلوب من التلاميذ تكملة العمل

(٣٧) كم تمزج اقة بن ما سعرها ٥٠ غرشاً و ٨٠ غرشاً لتحصل على ١٢٠ اقة ما سعرها ٧٠ غرشاً ؟

(٣٨) عطار يريد ان يخلط نوعاً من البهار ثمن الكيلو كرام منه ٩٦ غرشاً بنوع آخر ثمن الكيلو كرام منه ٦٠ غرشاً بحيث يكون وزن المخلوط ١٨٠ كيلو كراماً ما سعرهُ ٧٢ غرشاً فكم كيلو كراماً يأخذ من كل نوع ؟

القسم الثاني

١٧٥. المعادلات الآنية

حلّ: $\frac{ك+ى}{ك ى} = \frac{٢}{٣٠}$ و $\frac{٣ك+٢ى}{ك ى} = \frac{٢}{٥}$

$$\frac{ك}{ك ى} + \frac{ى}{ك ى} = \frac{٢}{٣٠} \quad و \quad \frac{٣ك}{ك ى} + \frac{٢ى}{ك ى} = \frac{٢}{٥}$$

اي $$\frac{١}{ى} + \frac{١}{ك} = \frac{٢}{٣٠} \quad و \quad \frac{٣}{ى} + \frac{٢}{ك} = \frac{٢}{٥}$$

والآن نحل المعادلتين بالطرق التي تعلمتها قبلاً

تمرين شفهي

(١) اذا كان د/ احد ضلعي ب/ل فما هو الضلع الآخر ؟

(٢) طول مستطيل ط متراً وعرضهُ ع متراً فكم يكون محيطهُ ؟ كم مساحتهُ ؟

(٣) مساحة مستطيل ب ت مترًا مربعًا فاذا كان طوله ب مترًا كم يكون عرضهُ ؟ كم يكون محيطهُ ؟

(٤) طول مستطيل م مترًا وعرضهُ ع - د فما مساحتهُ ؟ ما محيطهُ ؟

(٥) ارتفاع مثلث ق قدمًا وقاعدتهُ ل - ن فما مساحتهُ ؟

(٦) ارتفاع مثلث ق قدمًا وقاعدتهُ ثلاثة اضعاف ارتفاعهِ فكم قدمًا قاعدتهُ ؟ كم مساحتهُ ؟

(٧) اذا كان عمر فريد س سنة فماذا تكون دلالة س - ٧ ؟ ما معنى المعادلة س + ٦ = ٣ (س - ٧) ؟

(٨) مساحة مثلث ى يردًا مربعًا وقاعدتهُ ق قدمًا فما ارتفاعهُ ؟

(٩) اذا وزنت اقة ذهب في الماء فانها تنقص ١/١٩ من ثقلها . كم يكون نقصان ١٠ اقات ؟ ك اقة ؟

(١٠) اذا وزنت اقة فضة في الماء فانها تنقص ١/١٠ ثقلها . كم يكون نقصان ٩ اقات ؟ ى اقة ؟

(١١) اذا وزنت في الماء قطعة مركبة من ك اقة ذهب و ى اقة فضة فكم يكون نقصانها ؟

تمرين كتابي

(١) وزن قدم الحديد المكعبة وقدم الالومينوم ٦٤٦ ليبرة ووزن قدم الحديد وقدم النحاس ١٠٤٠ ووزن قدم النحاس وقدم الالومينوم ٧٠٦ ليبرات . فكم وزن كل قدم منها ؟

(٢) برج ايفل في باريز اعلى من بناية المتر وبوليتان في نيويورك وهذه اعلى من

تذكار وشنطن فاذا كان الفرق بين علو الاول والثانية ٢٨٤ قدماً وبين الاول والثالث ٤٢٩ قدماً ومجموع الاول والاخير ١٥٤٩ قدماً فكم يكون ارتفاع كل منها ؟

(٣) مجموع عددين م والفرق بينهما ف فما العددان ؟

(٤) كسر قيمته ب واذا زدت ٢ على الصورة صار ت فما هو ؟

(٥) مدخول جورج وفؤاد ١٠٠٠ ليرة انكليزية فاذا صرف جورج ½ مدخوله وفؤاد ثلثه كان مصروف جورج اكثر من مصروف فؤاد بـ ٣٥ ليرة فكم يكون مدخول كل منهما ؟

(٦) كم يكون الوقت اذا كانت الساعة بين ٤ و ٥ وكان عقرب الدقائق سابقاً عقرب الساعات ٨ دقائق

(٧) اذا كانت الساعة الآن بين ٥ و ٦ وبعد مضي ١٠ دقائق يكون عقرب الدقائق سابقاً عقرب الساعات بقدر تأخره عنه الآن فكم يكون الوقت الآن ؟

(٨) اشترك عدة تلامذة في شراء دراجة ولو زاد عددهم ٣ لنقص ما يدفعه الفرد ليرة سورية ولو نقص عددهم ٣ لزاد ما يدفعه كل شخص ليرة سورية فكم كان عدد الاشخاص وثمن الدراجة ؟

(٩) قطع سائق سيارة مسافة معلومة ولو سار ٣ اميال اسرع لنقص الوقت ساعة واحدة ولو سار ٥ اميال اسرع لنقص الوقت ساعة ونصف فكم كانت المسافة ؟

(١٠) انبوبان يملآن معاً حوضاً اذا فتح الاول ٤ ساعات والثاني ٥ ساعات ولكنهما يملآنه معاً اذا فتح الأول ٣ ساعات والثاني ٨ ساعات ففي كم من الوقت يملأه كل منهما ؟

(١١) وزن سبيكة مركبة من الذهب والفضة ٢١ ليرة ووزنها في الماء ١٩ ليرة

فاذا كانت خسارة الذهب اذا وزن في الماء ١/١٩ من ثقله والفضة ١/١٠ ثقلها فكم ليبرة ذهب وفضة في السبيكة ؟

(١٣) ثقل قطعة نحاس وتنك ١٠٠ كيلو ووزنها في الماء ٨٧٫٥ كيلو فاذا كان ثقل النحاس النوعي ٨٫٨ والتنك ٧٫٣ فكم ثقل النحاس والتنك فيها ؟

(١٤) مزج عطار نوعين من البن ما ثمن الاقة منه ١٥ غرشاً و ٢٠ غرشاً فحصل على ١٠٠ اقة باعها بسعر ٢٠ غرشاً وربح ٢٥ ٪ فكم اقة أخذ من كل نوع ؟

(١٤) مزج عطار نوعين من البهار سعر الاقة من احدها ٣٥ غرشاً ومن الآخر ٥٠ غرشاً فحصل على ٢٠٠ اقة باعها بثمن ٥٢ غرشاً الاقة وربح ٣٠ ٪ فكم اقة اخذ من كل نوع ؟

(١٥) سبح حبيب في نهر سرعة مجراه ١/٢ ١ ميل في الساعة ووجد انه لو سبح عكس المجرى مسافة ميل واحد لاقتضى له ٤ امثال الوقت الذي يقطع فيه الميل اذا سبح مع المجرى فكم كانت سرعته ؟

(١٦) سار امين وبديع وسليم من نقطة واحدة بسرعة ٤ و٥ و٦ اميال على التتابع وقام امين قبل بديع بساعتين فبعد كم من الوقت من قيام بديع يجب ان يجري سليم حتى يلحق امين في البرهة التي يلحقه فيها بديع ؟

(١٧) برميلان يشتملان على مزيج من الخمر والماء ففي احدها الخمر ٣ امثال الماء وفي الآخر الماء ٥ امثال الخمر فكم ليترا نأخذ من كل برميل لنملأ برميلاً ثالثاً سعته ٥٩٦ ليترا بحيث يتناصف فيها الخمر والماء ؟

(١٨) ترافق ثلاثة مع الأول ٤ جياد ومع الثاني ٧ بغال ومع الثالث ٩ حمير واتفقوا ان يعطي كل حيوانا لكل من رفيقيه ثم باعوا الحيوانات فاصبح مع كل ١٧٤ ليرة مصرية فكم ثمن كل من الحيوانات ؟

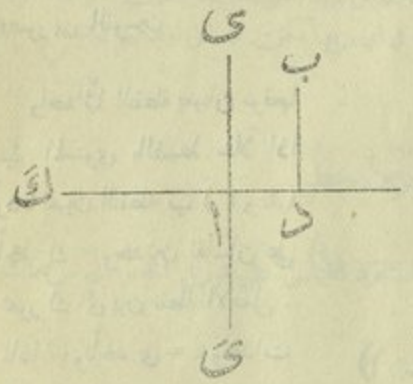
الفصل الثاني عشر

الخطوط البيانية

القسم الاول

١٧٦. الخطوط البيانية للمعادلات: اذا كان لدينا معادلة جبرية مشتملة على مجهولين ك وى ووضعنا بدل ك قيماً معينة واستخرجنا قيم ى المقابلة لقيم ك فنستطيع حينئذٍ ان نرسم خطًّا بيانيًا يمثل المعادلة المفروضة . وهذه الخطوط البيانية على جانب عظيم من الاهمية والفائدة كما سترى

١٧٧. المحوران:



هما خطان مستقيمان متعامدان ومتقاطعان في النقطة ا مثل الخطين ك كَ وى ىَ كما ترى في الرسم ويكون احدهما أفقيًا والآخر رأسيًا

١٧٨. محور ك: او محور الاحداثيات الافقية هو المحور الافقي ك كَ

١٧٩. محور ى: او محور الاحداثيات الرأسية هو المحور الرأسي ى ىَ

١٨٠. نقطة الاصل: هي نقطة تقاطع المحورين كالنقطة ا

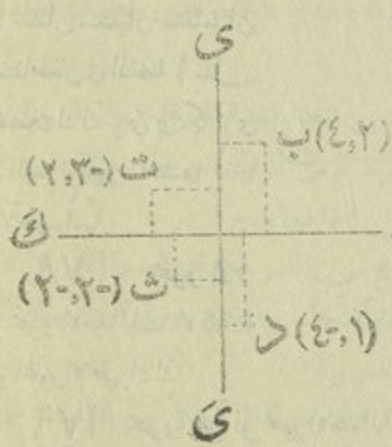
١٨١. الاحداث الافقي: لاي نقطة كانت ويقال له ايضًا الفصلة هو

بُعد تلك النقطة من المحور الرأسي على خطٍ موازٍ للمحور الافقي ويكون ايجابيًا اذا قيس الى يمين ى ىَ وسلبيًا اذا قيس الى يساره.

١٨٢. الاحداث الرأسي: لاي نقطة كانت ويقال له ايضًا **المعيَّن** او **المعيِّنة** هو بُعد تلك النقطة من المحور الافقي على خط موازٍ للمحور الرأسي ويكون ايجابيًا اذا قيس فوق ك كَ وسلبيًا اذا قيس تحته

وعليه يكون الاحداث الافقي للنقطة ب مساويًا اد والاحداث الرأسي د ب

١٨٣. الاحداثيان لاي نقطة هما الاحداث الافقي والاحداث الرأسي تلك النقطة. ويقال للنقطة التي احداثياها ٢ و ٤ مثلاً النقطة (٢ و ٤) حيث نكتب الاحداث الافقي اولاً ثم الاحداث الرأسي ثانيًا وننفصلة عنهُ بالواو ويكون كلاهما محصورين بالقوسين



واحداثيًا النقطة يعينان موقعها في المستوى بالضبط مثلاً اذا أردنا تعيين النقطة ب (٢ و ٤) نأخذ ك = وحدتين تقاسان على أ ك محور ك الى يمين نقطة الاصل. (لماذا؟) ونأخذ ى = ٤ وحدات تقاس فوق محور ى عمودية عليه فالنقطة الحادثة تكون النقطة المطلوبة كما ترى في الرسم وكذا يمكن تعيين النقط ت (-٢ و ٣)؛ ث (-٢ و -٢)؛ د (١ و -٤)

١٨٤. الارباع: هي الاربعة الاقسام التي ينقسم اليها مستوى الرسم بالمحورين الافقي والرأسي وتسمى الربع الاول والثاني والثالث والرابع على الترتيب. ففي الرسم السابق تقع النقطة ب في الاول و ت في الثاني و ث في الثالث و د في الرابع فاحفظ هذا جيدًا

١٨٥. تسمى طريقة تحديد وضع النقطة او رسمها بواسطة احداثيها تعيين النقطة

والافضل عند اجراء العمل استخدام الورق المقسم الى مربعات لانّ فيهِ نوعين من المستقيمات المتوازية المتساوية ابعادها بعضها عن بعض نوع افقي ونوع راسي فبعد ان يختار من هذه المستقيمات اثنان متقاطعان ليكونا محورين و يميزان في الرسم بحملها أكثف واعرض من سائر المستقيمات يؤخذ اقسم او اكثر من الأقسام الصغيرة وحدة للقياس وبهذه الواسطة يمكن تعيين اي نقطة متى علم احداثياها و بالعكس اذا علم موقع اي نقطة في اي ربع أمكن قياس احداثيها بواسطة الاقسام الظاهرة على الورق

تمرين خطي

المطلوب اجراء الاشغلة الآتية بمجرد القياس على الورق المقسّم الى مربعات ثم تحقيقها بالحساب متى تيسر ذلك

عيّن وارسم النقط الآتية :

(١) (٣و٣) ; (-١و٣) ; (-٣و-٤) ; (٤و-١)

(٢) (٥و١) ; (-٣و٤) ; (٥٫٣و٠) ; (١و-٣) ; (٠و٠)

(٣) (-٥٫١و٣) ; (١و-٣) ; (٥٫٣و٤) ; (-٣و-١½)

(٤) (−٣و−٤)؛(½ ١و−½)؛(−١و−١)؛(٠و−٣)

(٥) (٣و٠)؛(−٣و٠)؛(٠و٤)؛(٠و−½)

(٦) ارسم المثلث الذي رؤوسه النقط (١و١)و(٣و−٣)و(٣و٣)

(٧) ارسم الشكل الذي رؤوسه النقط (٣و−١) و(−٤و−٣) و(−٣و٥)و(٣و٤)

(٨) كم قيمة الاحداث الرأسي لجميع النقط الواقعة على المحور الافقي ؟

(٩) كم قيمة الاحداث الافقي لجميع النقط الواقعة على المحور الرأسي ؟

(١٠) ما مركز النقطة التي احداثيها الافقي صفراً ؟ التي احداثيها الرأسي صفراً ؟ التي كلٌّ من احداثييها صفرٌ ؟

(١١) ارسم المستطيل الذي رؤوسه النقط (١و٣) و(٦و٣) و(١و−٣)و(٦و−٣)وجد مساحته

(١٢) ارسم المستطيل الذي رؤوسه النقط (−٣و٤)و(٤و٤) و(−٣و−٣)و(٤و−٣)وجد مساحته

(١٣) ارسم المثلث الذي رؤوسه النقط (−٣و−٤)و(−١و٣) و(٣و−٤) وجد مساحته

الخطوط البيانية لمعادلات الدرجة الاولى

١٨٦. لاجل رسم الخط البياني لمعادلة الدرجة الاولى التي تشتمل على مجهولين مثل ك وي فاننا نضع بدل ك سلسلة مقادير رقمية مناسبة مثل ٠ , ١ , ٢ , ٣ , ...الخ ؛ −١ , −٢ , −٣ , ...الخ ثم نستخرج قيم ى المقابلة لها ونعتبر مقادير ك احداثيات افقية ومقادير ى احداثيات رأسية وبهذه الطريقة نتمكن من تعيين

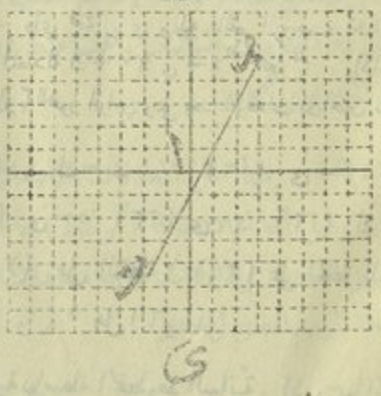
عدة نقط متتالية يتكون من وصلها خط مستقيم او منحنٍ يسمى الخط البياني للمعادلة المفروضة .

مثال ١ . ارسم الخط البياني للمعادلة ى = ٢ ك − ١

لاجل استخراج قيم ى المقابلة لقيم ك رتب العمل كما ترى ادناهُ

ك	ى
٠	−١
١	١
٢	٣
٣	٥
الخ....	الخ....
−١	−٣
−٢	−٥
الخ...	الخ..

ارسم النقط (٠ و − ١) و(١ و ١) و(٢ و ٣) و(٣ و ٥)
و(− ١ و − ٣) و(− ٢ و − ٥) الخ .... وصلها بخط فينتج لك المستقيم الذي تراه في الرسم الآتي :



١٨٧. معادلة الدرجة الاولى . في ما كانت فيها قوة الكمية المجهولة واحدًا وليس اكثر كما ابنّا ذلك سابقًا

١٨٨. من المقرر ان معادلة الدرجة الاولى البسيطة التي تشتمل فقط على مجهولين تمثّل بخط مستقيم . وبما ان الخط المستقيم يتعين بتعيين نقطتين فقط فلأجل رسم الخط البياني لمعادلة الدرجة الاولى

يكفي تعيين نقطتين ووصلها بخط مستقيم هو الخط البياني المطلوب للمعادلة المفروضة

تمرين خطي

ارسم الخطوط البيانية للمعادلة الآتية :

(١) ى = ك + ١ (٢) ى = ك + ٢ (٣) ى = ك − ٣

(٤) ى = ك (٥) ى = ٢ك (٦) ى = ٣ك

(٧) ى = ٣ك + ١ (٨) ى = ك − ٣ (٩) ك + ى = ٧

(١٠) ك + ى = ٠ (١١) ك − ى = ٠ (١٢) ٢ى = ٣ك + ٦

(١٣) ٢ى = ٣ك + ٣ (١٤) ٢ى = ك + ٢

(١٥) ك + ى = ٥ (١٦) ك = ٤

ملاحظة : المعادلة ك = ٤ تساوي ذات المعادلة حيث سمى الكمية ى صفراً اي انها ك + ٠ × ى = ٤ وهذه تتم بفرض ك = ٤ . واي قيمة لـ ى وعليه فالقيم الزوجية (٤,١) و(٤ و٥) و(٤,−٢) الخ .... تجعل المعادلة ك + ٠ × ى = ٤ "صحيحة" . واذا رسمنا النقط ووصلناها بخط مستقيم لوجدناه موازياً للمحور الراسي وعلى بعد ٤ وحدات الى اليمين منه

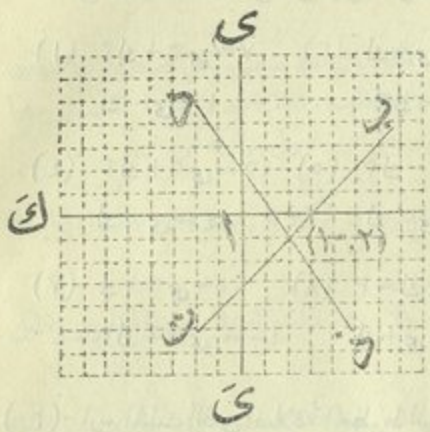
(١٧) ك = − ٥ (١٨) ك = ب (١٩) ى = ٣

(٢٠) ى = − ٤ (٢١) ى = ٥ (٢٢) ى = د (٢٣) ك = ٠

(٢٤) ى = ٠ (٢٥) هل النقطة (٤و٣) على الخط البياني للمعادلة ٢ك − ٣ى = ١٢ ؟ هل (٠ و٦) ؟ هل (٦و٠) ؟

١٨٩. حل المعادلات الآتية بواسطة الخطوط البيانية. اذا رسمنا الخط البياني للمعادلة ك − ى = ٣ [وهو المستقيم ب ت كما ترى في الرسم الآتي] والخط

البياني للمعادلة ٢ ك + ٣ ى = ٤ [وهو المستقيم د ذ] وقسنا احداثي نقطة تقاطعهما لوجدناها النقطة (٣ و − ١)



وكذلك لو حللنا المعادلتين ك − ى = ٢ و ٢ ك + ٣ ى = ٤ لوجدنا ك = ١٢ و ى = − ١

وعلى العموم نقول ان جذري معادلتين آنيتين [بسيطتين] هما احداثيا نقطة تقاطع خطوطها البيانية او ان حلّ المعادلتين الآنيتين يعادل استعلام إحداثيي نقطة [او نقط] تقاطع خطيهما البيانيين لان هذين الاحداثيين فقط يحققان كلا الخطين البيانيين وقيمتها فقط هي القيمة الوحيدة للمجهولين ك و ى التي تجعل المعادلتين صحيحتين

١٩٠. فاذًا لحلّ المعادلات البيانية البسيطة بواسطة رسومها ارسم خطوطها البيانية وقس احداثيات نقطة [او نقط] تقاطعها. وهذا نستخدمه لامتحان حلها بالطرق الجبرية. واذا كانت درجة المعادلات فوق الثانية ففي الغالب يكون حلها بواسطة الرسوم أفضل واخصر

تمرين خطي

حلّ المعادلات الآتية وامتحن الجواب بواسطة الرسم البياني :

(١) ٢ك + ٣ى = ٧ (٢) ك + ى = ٢ (٣) ى = ٣ك – ٤
ك – ى = ١ ٣ك – ٢ى = ١٦ ى = – ٢ك + ١

(٤) ٢ك + ٣ى = ١٣ (٥) ٣ك – ٢ى = ٠ (٦) ى + ك = ٣
ك – ى = ٤ ك – ى + ١ = ٠ ى – ك = ٤

(٧) ك + ٣ى = ٥ (٨) ٢ = ك ى (٩) ٢ى = ك
٢ك – ٥ى = – ١ ك + ى = ٠ ك + ى + ٦ = ٠

(١٠) ارسم المثلث الذي اضلاعه الخطوط البيانية للمعادلات ٥ى – ك – ٧ = ٠ و ٣ى – ٥ك + ٩ = ٠ و ى + ٢ك + ٣ = ٠ وجد احداثيات رؤوسه جبريًا ورسمًا

(١١) اثبت بالرسم البياني ان النقط الثلاث (٣ و ٠) و (٢ و ٧) و (٤ و – ٧) واقعة على مستقيم واحد وجد ابن يتقاطع ذلك المستقيم مع محور ى

(١٢) برهن ان النقط الثلاث (٣ و ٢) و (٨ و ٨) و (– ٢ و – ٤) واقعة على مستقيم واحد وجد ابن يتقاطع ذلك المستقيم مع محور ك

١٩١ . الخطوط البيانية للقوانين الرمزية والتطبيقات العملية . قد اصبح الآن بوسعنا ان نستعيض في كثير من الاحوال عن الحسابات العددية بالخطوط البيانية . فنستخرج الجواب ولو تقريبيًا بعد رسم الخط البياني المطلوب باخصر وقت لاي عدد من الامثلة التي تكون من ذات النوع كما في الامثلة الآتية :

(١) الليرة الانكليزية تساوي ٤٫٨٧ ريالات اميركانية فاذا مثلنا الليرة بـ ل والريال بـ ر نتج القانون ل = ٤٫٨٧ ر. المطلوب رسم الخط البياني لهذا القانون

ملاحظة : بما ان القانون معادلة بسيطة فخطه البياني خط مستقيم ويكفي لتعيينه ان نعلم نقطتين منه . وبعدئذٍ نصلها بخط مستقيم هو الخط البياني المطلوب . فاذا كانت ر صفرًا كانت ل صفرًا واذا كانت ر = ٣ كانت ل = ٩٫٧٤ . ارسم ر على محور ك ول موازية لمحور ى

ب . جد بواسطة القانون قيمة ٧ ليرات انكليزية . جد ذات القيمة بواسطة الرسم وقابل بين النتيجتين

ت . جد بواسطة الرسم قيمة ٥٠ ريالاً . جد ذات القيمة بواسطة القانون وقابل بين النتيجتين

(٢) راتب كاتب يزاد كل سنة ل ليرة فاصبح بعد مضي ٦ سنوات ١٢٨ ليرة وبعد مضي ١٥ سنة ٢٠٠ ليرة . المطلوب رسم الخط البياني للراتب وتعيين (ب) المقدار الاساسي (الذي ابتدأ به) و (ت) ومقداره في بداءة السنة ٢١ من خدمته

الحل : لنكن ى راتب الكاتب بعد مضي ك سنة من خدمته وس مقدار الراتب الاساسي فلدينا ى = ل ك + س وهذه معادلة بسيطة يمثلها خط مستقيم

ولما كانت ك = ٦ كانت ى = ١٢٨ . ولما كانت ك = ١٥ كانت ى = ٢٠٠ وهاتان النقطتان تعينان الخط البياني المطلوب . وانسب طريقة لرسمه ان نتخذ سنتيمترًا او قيراطًا لكل ١٠ سنوات على محور ك ومثلها لكل ٨٠ ليرة على الخط العمودي

(ب) لمعرفة الراتب الاساسي نجد طول القسم الذي يقطعه الخط البياني على محور ى اي حينما تكون ك = ٠ وهذا نجده = ٨٠ ليرة

(ت) الراتب في بداءة السنة ٢١ اي بعد مضي ٢٠ سنة هو الاحداث الراسي للنقطة التي احداثها الافقي ٢٠ وهذا نجده ٢٤٠ ليرة

تمرين خطي

(١) اذا وضعت ليرة واحدة في البنك س سنة بفائدة ٦٪ صار مبلغها (غ)
غ = ١ + ٠٫٠٦ × س اي غ = ١ + ٠٫٠٦ س المطلوب رسم الخط البياني ثم معرفة الوقت الذي فيه تتضاعف الليرة.

اذا وضع ولد ليرة في البنك المذكور حينما كان عمره ١٠ سنوات فكم تبلغ بعد بلوغه ٣٥ سنة من العمر ؟ جد الجواب بواسطة الرسم وبواسطة القانون وقابل بينهما

(٢) القانون لمحيط الدائرة د = ٣٫١٤ ق. ارسم الخط البياني وجد بواسطته (ب) محيط الدائرة اذا كان قطرها ٣ امتار ؛ ١٠ امتار ؛ ١٢ مترًا (ت) قطر الدائرة التي محيطها ١٥ مترًا ؛ ٣٠ مترًا ؛ ٢٤ مترًا

(٣) اذا سقط جسم بفعل جاذبية الارض فقانون سرعته س = ٣٢ ث حيث س سرعة الجسم السائط اقدامًا في الثانية وث عدد الثواني. ارسم الخط البياني وجد بواسطته (ب) سرعة الجسم بعد مضي ٥ ثوانٍ ؛ ١٢ ثانية ؛ ٩ ثوانٍ. (ت) الوقت الذي فيه تصير سرعة الجسم ٥٠ قدمًا في الثانية ؛ ٨٤ قدمًا في الثانية

(٤) القانون ق = ٢٨٫٣ م يمثل العلاقة بين الاقدام الانكليزية ق والامتار. ارسم الخط البياني وجد قيمة ١٢ مترًا. ١٥ مترًا

(٥) مصروف مدرسة مؤلف من قسمين قسم ثابت المقدار وقسم متغير بالنسبة الى عدد الطلبة وهو يبلغ ٦٥٠ ليرة حينما يكون عدد الطلبة ١٠٥ ويبلغ ٧٤٢ ليرة حينما يكون عددهم ١٢٨. ارسم الخط البياني الذي يمثل المصروف لاي عدد

يكون في المدرسة من الطلبة وجد بواسطتهِ (ب) مقدار المصروف اذا ابلغ العدد ١١٥ طالبًا (ت) عدد الطلبة حينما يبلغ المصروف ٧١٠ ليرات

(القسم الثاني)

١٩٢ . لقد ذكرنا الخطوط البيانية التي تمثل تغير الكمية المطّرد او المستمر كالحرارة والمال اذا استثمر حيث التغييرات تستغرق وقتًا طويلاً ويكون طول الخط البياني غير محدود

ولكن يوجد نوع آخر من الخطوط البيانية التي تدل على المقدار النسبي المحدود بين عدة اشياء من ذات النوع في وقت واحد .

مثالهُ . وضع انيس في بنك سوريا ٤٧ ليرة وبدر ٢٢ وحليم ٢ وداود ٣٦

مثّل الاعداد بخط بياني لمعرفة نسبتها بعضها الى بعض

للحصول على الغاية المطلوبة تمثل الاعداد بالخطوط الافقية كما ترى في الرسم

١٩٣ . الخط البياني العمودي

هو رسم مؤلف من عدة خطوط للدلالة على النسبة الكائنة بين عدة كميات من ذات النوع . حيث تمثل كل كمية بخط حتى اذا وقعت العين عليهِ ادرك الناظر نسبة الكميات بعضها الى بعض بطريقة اجمالية تكون أفعل في النفس واسهل ادراكًا وارسخ حفظًا في الذاكرة

تمرين خطي

ارسم الخطوط البيانيّة العمودية لما يأتي :

(١) كان عدد الطلبة في اربع مدارس مختلفة ٤١٠ و ٢٦٠ و ٤١٢ و ١٩٣

(٢) كان معدل علامات انيس ٦٥ ويوسف ٧٢ ومتى ٨٢ وجلال ٩١ وفؤاد ٩٣

(٣) بلغ محصول الحبوب احدى السنين في العالم معبرًا عنه بملايين الاكيال كما يأتي : الأوتس ٤٤٢٦ . الحنطة ٣٣٣٣ . الذرة ٢٧٦٦ . الارز ١٦٦٦ . الشعير ١٢٢٥

(٤) بلغ محصول الشاي في احدى السنين معبرًا عنه بملايين اللبرات كما يأتي :

في الهند ٣٦٩ . في الصين ٢٠٦ . في سيلان ٢١٦ . في جافا ١٠٣ . في يابان ٨٤ . في فورموزا ٤٤

(٥) بلغ عدد الوفيات بحمّى التيفوئيد من كل مئة الف في احدى السنين كما يأتي : في مدينة بلتمور ٢٢ . في سنت لويس ١٣ . في فيلادلفيا ١٢ . في نيويورك ١٠ . في شيكاغو ٨ . في بوسطن ٨ . في كليفلند ٦

١٩٤ . الخطوط البيانية الدائرية . حينما يكون لدينا طائفة من الاعداد التي نعتبرها اجزاء كمية واحدة صحيحة فاننا نمثلها نسبيًّا بأقسام دائرة واحدة

مثالة : بلغت ارباح احد المزارعين ما زرعهُ في بستانهِ مدة الصيف كما يأتي :

من اللوبيا ٤ ليرات . الخس ٣ . البصل ٦ البندوره ٩ . الذره ١٤ . مثّل قيمة الاعداد النسبية بخط بياني دائري

ملاحظة : مجموع الاعداد ٣٦ . أرباح اللوبيا $\frac{4}{36}$ او $\frac{1}{9}$ الواحد الصحيح . $\frac{1}{9}$ ال $360° - 40°$. ارسم دائرة مناسبة الحجم وارسم في مركزها زاوية $40°$ واجعل هذا القسم يمثل اللوبيا . وهكذا تفعل في سائر الانواع

الرسم ٦

تمرين كتابي

ارسم الخط البياني الدائري لما يأتي :

(١) بلغت ارباح ٥ مخازن لاحد التجار في احدى السنين كما يأتي : المخزن الاول ٤٦٠٠٠ ليرة . الثاني ٤٨٠٠٠ . الثالث ٢٧٠٠٠ . الرابع ١٢٠٠٠ . الخامس ٦٠٠٠

(٢) بلغ مبيع ٤ مخازن لاحد التجار كما يأتي : الاول ٣٢٧٠٠٠ الثاني ٢١٦٠٠٠ . الثالث ١٦٢٠٠٠ . والرابع ٢٩٥٠٠٠

(٣) بلغ عدد الطلبة في الدائرة الاستعدادية في احدى السنين كما يأتي : الصف الاول ٩٠ . الثاني ١٢٠ . الثالث ١١٠ . الرابع ٩٠ . الخامس ٧٠

(٤) استخدم رجل راتبه ومقداره ١٢٠٠ ليرة كما يأتي . للطعام ٤٨٠ ليرة . اجرة منزل ٢١٦ . ملبوس ١٨٠ . وقود وتنويرات ٥٤ . سوكرتاه ١٨ . نثريات ٥٢ . صندوق التوفير ٢٠٠

(٥) اصدرت احدى شركات النقل بيانًا فهو تظهر كيفية صرف المدخول فكان كما يأتي: ٦٣٫٥ ٪ لاجل سير العمل وادارته ٤٫٥ ٪ فائدة أموال ٥٫٤ ٪ ضرائب ١٨٫٦ ٪ لتجديد ما تعطل من الآلات ٧ ٪ ارباح موزعة. والباقي لزيادة رأس المال

تمرين للمراجعة

(١) $(٤م^{٢}-٢)(٢م-٥)-٧م(م-٢)=$ ؟

(٢) جد اضلاع: (١) $\frac{١}{٩}$ ل م $-\frac{١}{٩}$ ل ى (٢) $م^{١٦}-١$

(٣) $٤(ل+٢م)^{٢}-٩ن^{٢}$ (٤) $٣٦ل^{٢}+١٢ل+١$

(٥) $ل^{٤}-(ل-٦)^{٢}$ (٦) $٢٧ل^{٢}+١٢٥ى^{٢}$

(٣) ما العدد الذي اذا زدت ٢٠٫٥ على خمسة اضعافه كان المجموع ٣ اضعاف العدد مع ١٦٠ ؟

(٤) ابسط: $\frac{١}{ت}+\frac{ت-ب}{ت^{٢}+ت ب}-\frac{٢}{ت+ب}$

(٥) حلّ: $ب ك=ت(ى-٣)$ و $ى-ك=\frac{ب^{٢}+ت^{٢}}{ب ت}$

(٦) مجموع رقمي عددٍ ؟ واذا قسمته على مجموع رقميه كان الخارج رقم منزلة الآحاد فما هو العدد ؟

(٧) كان محصول البن في احدى السنين معبرًا عنه بملايين الليبرات كما يأتي: البرازيل ٣٢٥٤. اميركا الوسطى ٤٤٧. فنزويلا ١٤٧. كولمبيا ١٤٩. وسائر البلدان ٥١١. ارسم الخط البياني الدائري

(٨) حلّ الى اضلاع :

(١) $ل^{٢}-م^{٢}-ن^{٢}+٢من$ (٢) $ل^{٢}+(د+س)ل+دس$

(٣) $(٣ل+٥م)^{٢}-٤(٢ل-٣م)^{٢}$ (٤) $١٦-٢٥ل^{٢}$

(٥) $م^{٤}+٦م^{٢}-١٢٥م^{٢}$ (٦) $م^{٤}-١١م^{٢}ل^{٢}+ل^{٤}$

(٩) اقسم $٢-م$ على $١+م$ الى ٥ حدود في الخارج

(١٠) ابسط : $(٢-\frac{٤-م^{٢}}{٣-م})+(\frac{م^{٢}-٤}{م^{٢}-٩})$

(١١) حلّ : $ت^{٢}(م-٤ب)-\frac{٥}{٤ب}(م-٣ت)-٤=٠$

(١٢) حلّ : $\begin{cases}(ك+٧)(ى-٤)-(ك+٤)(ى-٣)=٠\\(ك-٣)(ى+٥)-(ك-١)(ى+٢)=٠\end{cases}$

(١٣) اذا كانت قيمة فرنك الذهب ١٩٣٠ من الريال الاميركاني فاستخرج القانون وارسم الخط البياني وجد : (ب) قيمة ٦٤٠ فرنكاً (ت) قيمة ١٢٠ ريالاً

(١٤) اي عدد نضيفه الى كل من صورة ومخرج $\frac{١٨}{١٣}$ ليصير $\frac{٤}{٣}$ ؟

(١٥) حلّ : $\frac{٣د+ك}{٢د+ك}=\frac{ك-س}{ك+س}$

(١٦) اذا زدت على طول مستطيل متر بن وعلى عرضه ٣ زادت مساحته ٤٤ متراً مربعاً . ولكن لو انقصت متر بن من طوله ومتراً من عرضه نقصت مساحته ١٦ متراً مربعاً . فكم يكون طوله وعرضه ؟

الفصل الثالث عشر

الترقية والتجذير

القسم الاول

١٩٥. الترقية اسم عام يطلق على ضرب كمية في نفسها للحصول على قوتها الثانية او الثالثة او الرابعة وهلم جرًّا

ويمكن دائمًا ترقية اي كمية باجراء عملية الضرب ولكننا سوف نقتصر في بحثنا على ترقية الكميات التي يمكن كتابة نتائجها بمجرد النظر اليها

من المعلوم ان : $(ل^{٢})^{٢} = ل^{٢} . ل^{٢} = ل^{٢+٢} = ل^{٢ \times ٢}$

$(-ل^{٢})^{٢} = (-ل^{٢})(-ل^{٢}) = ل^{٢+٢} = ل^{٢ \times ٢}$

$(-ل^{٢})^{٣} = (-ل^{٢})(-ل^{٢}) = -ل^{٢+٢+٢} = -ل^{٢ \times ٣}$

$(-ى^{٥})^{٢} = (-ى^{٥})(-ى^{٥}) = ى^{٥+٥} = ى^{٢ \times ٥}$

$(٥م^{٤})^{٢} = (٥)^{٢}(م^{٤})^{٢} = ٢٥م^{٤ \times ٢} = ٢٥م^{٨}$

فاذًا الترقية اية كمية بسيطة لقوة ما : — نرفي المسمى [اذا وجد] الى القوة المطلوبة بواسطة الحساب ونسبقة بالعلامة اللازمة طبقًا لقانون العلامات . ثم نتبعه بنتيجة ضرب دليل كل ضلع عددي في دليل القوة المراد الترقية اليها

١٩٦. ولاتمام الفائدة نعيد ذكر المبادىء العامة التي عرفناها من قانون العلامات :

(١) مربع اي كمية سواء كانت سلبية او ايجابية " دائمًا ايجابي "

(٢) علامة القوة الزوجية . لاية كمية مهما كانت علامتها " ايجابية " ولا تكون سلبية ابدًا

(٣) علامة القوة الفردية لاية كمية هي " نفس " علامة تلك الكمية

مثال ١. $(-٢ل^{٣})^{٥} = (-٢)^{٥}(ل^{٣})^{٥} = -٣٢ل^{١٥}$

مثال ٢. $(٣م^{٢}ل^{٥})^{٦} = (-٢)^{٦} - م^{١٢}ل^{٣٠} = ٦٤م^{١٢}ل^{٣٠}$

مثال ٣. $\left(\frac{٢ل^{٢}}{٣ك^{٢}ى^{٥}}\right)^{٤} = \frac{١٦ل^{٨}م^{٤}}{٨١ك^{١٢}ى^{٢٠}}$

ويجب ان يلاحظ اننا في المثال الاخير رفعنا كلاً من الصورة والمخرج على حـ

تمرين

جد مربع ما يأتي :

$٢ب^{٢}$; $٣ك^{٢}ى^{٤}$; $د^{٣}س^{٢}$; $٤ب ت^{٢}$; $٧د^{٥}س^{٢}$; $٦ل^{٢}م^{٦}$

$٥ب^{٢}ت^{٤}س^{٦}$; $-٣ب ت^{٢}س^{٥}$; $-٩ل^{٤}م^{٦}$; $١٠ادس^{٨}$

$-٨م^{٢}ن^{٦}$; $-ل^{٢}م^{٢}ن^{٥}ى^{٤}$; $-\frac{١}{٤}ك ى$

$\frac{٢٤ن^{٢}}{٢ك^{٥}ى^{٧}}$; $-\frac{١}{٢ك^{٥}}$; $-\frac{١}{٤ى^{٨}}$; $-\frac{٧ل^{٢}م^{٢}}{٨ك ى^{١٠}}$.

$-\frac{١}{٩ل^{٥}م^{٢}ن^{٤}}$; $-\frac{١٠}{١١ل^{٥}م^{٢}}$

جد مكعب ما يأتي :

$ل^{٢}ى^{٢}$; $٢ب^{٢}$; $٣ى^{٢}$; $٦ل^{٢}م^{٢}$; $-٣م^{٢}$

$-٢ل^{٢}م^{٢}س^{٤}$; $-٤ك^{٤}ى^{٢}$; $-٥س^{٥}د^{٦}$

$$\frac{١}{٣ب^{٢}ت} \; ; \; -\frac{٢ب^{٢}ت^{٢}ج^{٥}}{٣ك^{٢}ل^{٤}م^{٦}} \; ; \; -\frac{٥ك^{٥}ى^{٧}ل^{٩}}{٣م^{٢}ن^{٤}د^{١٣}}$$

جد قيمة ما يأتي

$$(ك^{٢}ى^{٣}) \; ; \; (-ك ى^{٢})^{٤} \; ; \; (-٢م^{٢}ن^{٢})^{٥} \; ; \; (-٣ك^{٢}ى^{٥})^{٦}$$

$$\left(\frac{٢ل^{٢}م}{ك^{٥}ى^{٧}}\right)^{٧} \; ; \; \left(-\frac{١}{ل^{٥}م^{٦}ن^{٧}}\right)^{٨} \; ; \; \left(\frac{ب^{٤}ت^{٥}د}{ك^{٢}ل^{٦}م^{٢}}\right)^{٩}$$

١٩٧. مرّ بنا ان: (١) مربع مجتمع حدّين يساوي مربع الحد الاول مع مضاعف حاصل الحدّين مع مربع الحدّ الثاني (٢) مربع فضلة حدّين يساوي مربع الحدّ الاول إلّا مضاعف حاصلها مع مربع الحدّ الثاني

مثال ١. $(ل+٣م)^{٢} = ل^{٢}+٢.ل.٣م+(٣م)^{٢}$
$= ل^{٢}+٦ل م+٩م^{٢}$

مثال ٢. $(٢ل^{٢}-٣ى^{٢})^{٢} = (٢ل)^{٢}-٢.٢ل^{٢}.٣ى^{٢}+(٣ى^{٢})^{٢}$
$= ٤ل^{٦}-١٢ل^{٢}ى^{٢}+٩ى^{٤}$

وذكرنا ايضاً ان مربع كمية كثيرة الحدود يساوي: (١) مجتمع مربع كل حدٍ من حدودها. (٢) مع مضاعف الحاصل الجبري للحد الواحد في كل حد من الحدود التي تليه مأخوذة الواحد بعد الآخر على الترتيب مع مراعاة قانون العلامات في كلٍ منها اي ان تكون العلامة "+" او "−" في كل حاصل حسب اتفاق علامتي الحدين المكوّن منها ذلك الحاصل او اختلافهما

مثال ١. $(ل-٢م-٣ى)^{٢} = ل^{٢}+٤م^{٢}+٩ى^{٢}-٤ل م-٦ل ى+١٢م ى$

ملاحظة: مربع الكمية الثلاثية لا يزيد عن ٦ حدود

تمرين

جد مربع ما يأتي :

(١) ب + ٢ ت (٢) ٢ ل − م (٣) ك + ٢ ى

(٤) ٢ ل − ٣ م (٥) ٥ − ل (٦) ١ + ك٢

(٧) س د + ١ (٨) ل + م − ن (٩) ل − م − ن

(١٠) ك + ل + ٢ ى (١١) ك − ٢ ل + ٢ ى

(١٢) ل٢ − ل − ١ (١٣) ل − م + ن − ى

(١٤) ل + م − ن − ى (١٥) ٢ د − ٣ ج + ٤ م − ٥ ن

١٩٨ . تعلمنا من اختصارات الضرب ان :

$(ل + م)^{٢} = ل^{٢} + ٢ ل^{٢} م + ٢ ل م^{٢} + م^{٢}$

و $(ل - م)^{٢} = ل^{٢} - ٢ ل^{٢} م + ٢ ل م^{٢} - م^{٢}$

وعليه اذا انتبهنا جيدًا الى كيفية تكوين الحدود وترتيبها في هاتين النتيجتين تمكنّا من معرفة مكعب اية كمية ثنائية

مثال ١ . $(٢ ب + ل)^{٣} = (٢ ب)^{٣} + ٣ (٢ ب)^{٢} ل + ٣ (٢ ب) ل^{٢} + ل^{٣}$

$= ٨ ب^{٣} + ١٢ ب^{٢} ل + ٦ ب ل^{٢} + ل^{٣}$

مثال ٢ . $(٣ ل^{٢} - ٢ م)^{٣} = (٣ ل^{٢})^{٣} - ٣ (٣ ل^{٢})^{٢} (٢ م) + ٣ (٣ ل^{٢}) (٢ م)^{٢} - (٢ م)^{٣}$

$= ٢٧ ل^{٦} - ٣٦ ل^{٤} م + ٥٤ ل^{٢} م^{٢} - ٨ م^{٣}$

تمرين كتابي

جد مكعب ما يأتي :

(١) ك+ى (٢) ك–ى (٣) م–٢ن (٤) ٢د+س
(٥) ٣ل+٢م (٦) ٤ك–١ (٧) ١–٥ى
(٨) ٢ل م–٣ (٩) ٤م^{٢}–٣م (١٠) ل–½ن
(١١) ½ل^{٢}–٣م (١٢) ½ك +٥ى

التجذير

١٩٩ : جذر اية كمية معلومة هو الكمية التي اذا رفعت الى القوة المساوية لدليل الجذر نتجت تلك الكمية . فالتجذير اذًا عكس الترقية ويقال له استخراج الجذور

مثال ١ . $\sqrt[٦]{\text{ل}^{٦}}$ = ل^{٢} لان (ل^{٢})^{٣}= ل^{٦}

مثال ٢ . $\sqrt[٦]{-\text{ل}^{٦}}$ = –ل^{٢} لان (–ل^{٢})^{٣}= ل^{٦}

تنبيه : لكل كمية ايجابية جذران مربعان متساويان في القيمة ومتناقضان في العلامة .

مثال ١ . $\sqrt[٦]{١٦\text{ك}^{٢}\text{ى}^{٦}}$ = +٤ك ى^{٣} او –٤ ك ى^{٣} وللاختصار يكتبان ± ٤ك ى^{٣}.
والعلامة "±" تقرأ مع او "لا" . ويقال لها العلامة المزدوجة

مثال ٢ . $\sqrt[٤]{٨١\text{م}^{١٠}\text{ى}^{٨}}$ = ± ٣م^{٥} ى^{٤}

٣٠٠. نستنتج من قانون العلامات ما يأتي:

(١) الجذر الزوجي لاي كمية ايجابية يكون اما ايجابيًا او سلبيًا اي تسبقه العلامة المزدوجة ±

(٢) لا يمكن ان يكون للكمية السلبية جذر زوجي

(٣) علامة الجذر الفردي لاية كمية هي علامة الكمية نفسها

الكميات التي في مثل $\sqrt{٩ - ٥}$ و $\sqrt{٩ - ٩}$ و $\sqrt{٩ - ك^٢}$ لا معنى لها في الحساب وتميزًا لها عما سواها من الكميات الحقيقية الايجابية والسلبية فانها تدعى "وهمية" او غير حقيقية او مستحيلة

مثال ١. $\sqrt{١٦ ل^٨ م^{١٢}} = \pm ٢ ل^٢ م^٢$ لان $(\pm ٢ ل^٢ م^٢)^٢ = ١٦ ل^٨ م^{١٢}$

مثال ٢. $\sqrt{٩ - ل^{١٢}} = - ل^٤$ لان $(- ل^٤)^٢ = - ل^{١٢}$

٣٠١. نستنتج من الامثلة السابقة قاعدة عمومية لاستخراج اي جذر لاية كمية بسيطة وهي:

(١) دليل كل ضلع حرفي في الجذر هو الخارج من قسمة دليله في الكمية المفروضة على دليل الجذر المطلوب استخراجه

(٢) يستخرج جذر المعامل اذا وجد بالطرق الحسابية ويجعل مع الجواب

تمرين كتابي

أجب ما استطعت شفاهًا

جد الجذر المربع لما يأتي:

$ك^٢ ى^٦$; $٤ ل^٤ م^٨$; $١٦ م^٤ ن^{١٦}$; $٩ ك^٦ ى^{١٢}$; $٦٤ ل^٢ م^٦$;

$٨١ ك^{١٨}$; $١٤٤ ل^{٢٤} م^٦$; $٤٩ م^{٤٨}$

$$\frac{١}{٨١م^{١٦}} \; ; \; \frac{٢٥}{٦٤ك^{٨}} \; ; \; \frac{م^{٨}ن^{١٦}}{١٦} \; ; \; \frac{٢٨٩}{٤٢٤ل^{١٨}}$$

$$\frac{١٢١}{٤٩ك^{١٠}ى^{١٨}} \; ; \; \frac{٤٠٠م^{٢٤}}{٤٢٤ل^{٤٠}ى^{٦٠}}$$

جد الجذر المكعب لما يأتي :

$$٨ك^{٢}ى^{٦} \; ; \; ٢٧ل^{٦}م^{٩} \; ; \; -٦٤ب^{٢}ت^{٩} \; ; \; ١٢٥ل^{٦}م^{٩}ى^{١٨}$$

$$٣٤٣ك^{٢١} - ١٢٥ل^{٩} \; ; \; -\frac{٨م^{١٢}}{٢٧ل^{٢٩}} \; ; \; \frac{٢١٦ل^{١٢}م^{٢٤}}{٧٢٩ك^{٢٦}}$$

جد قيمة ما يأتي :

$$\sqrt[٤]{٦ك^{٤}ى^{٨}} \; ; \; \sqrt[٥]{ل^{١٠}م^{١٥}} \; ; \; \sqrt[٦]{٦٤ل^{١٨}م^{٢٤}} \; ; \; \sqrt[٥]{-٤٣م^{١٥}د^{٢٥}} \; ; \; \sqrt[٧]{١٢٨ل^{٤٩}}$$

$$\sqrt[٨]{٣٥٦ك^{١٦}ى^{٢٤}} \; ; \; \sqrt[٣]{-ل^{١٨}م^{٢٧}} \; ; \; \sqrt[٥]{-\frac{٢٤٣}{ل^{٢٠}}} \; ; \; \sqrt[٧]{-\frac{ل^{٤٢}}{ى^{٢١}}}$$

$$\sqrt[٥]{\frac{٢٤٣ك^{٢٠}ى^{١٥}}{٢٤٣٥٠٢}}$$

٣٠٢. قد علمنا مما درسناهُ قبلاً انهُ يمكن معرفة مربع الكمية الثنائية فوراً دون اجراء عملية الضرب

مثلاً $(ل + ٢م)^{٢} - ل^{٢} + ٢(ل) \cdot (٢م) + (٢م)^{٢}$

وبالعكس بمجرد النظر الى العبارة الثلاثية يمكننا ان نعلم اذا كانت مربعاً تاماً وان نستخرج جذرها المالي فوراً

مثلاً $م^{٢} + ٤م ى + ٤ى^{٢}$ مربع تام وجذرها المالي $م + ٢ل$

ولكن الطريقة العامة لاستخراج الجذر المالي سوف نبسطها بالمثالين الآتيين

مثال ١ . جد الجذر المالي لـ : ل^{٢} + ٢ ل م + م^{٢}

الكمية ل^{٢}+٢ ل م + م^{٢} مربع تام وجذرها المالي ل + م والآن يلزمنا ان نبحث عن طريقة تمكننا من وجدان كل من الحدين ل و م

ومن الواضح الجلي ان الحدّ الاول ل هو الجذر المالي لـ ل^{٢} الحدّ الاول من الكمية المفروضة

والآن (ل^{٢} + ٢ ل م + م^{٢}) − ل^{٢} − ٢ ل م + م^{٢} − م (٢ ل + م)

وعليه بعد ان نجد الحد الاول ونطرح مربعه من الكمية المفروضة ونقسم الباقي على ٢ ل + م يكون الخارج م الحد الثاني من الجذر

وهاك ترتيب العمل

ل + م) ل^{٢} + ٢ ل م + م^{٢}

ل^{٢}

٢ ل م + م^{٢}	٢ ل + م
٢ ل م + م^{٢}	

وشرحهُ ان القسم الاول من المقسوم عليه نتيجة تضعيف ل وهو اول حد في الجذر استخرجناهُ قبلاً . ثم نقسم ٢ ل − م + م^{٢} وهو اول حدّ من الباقي على ٢ ل + م فينتج م وهو الحدّ الثاني في الجذر ويوضع ايضاً في المقسوم عليه ليصير تاماً . ثم نضرب المقسوم عليه كلهُ في م ونطرح حاصل الضرب من الباقي الاول فلا يبقى شيء وعليه يكون الجذر المطلوب ل + م

مثال ٢ . جد الجذر المالي لـ : م^{٤} − ٦ م^{٣} + ١٩ م^{٢} − ٣٠ م + ٢٥

م^{٢} − ٣ م + ٥) م^{٤} − ٦ م^{٣} + ١٩ م^{٢} − ٣٠ + م + ٢٥

م^{٤}

− ٦ م^{٣} + ١٩ م^{٢}	٢ م^{٢} − ٣ م
− ٦ م^{٣} + ٩ م^{٢}	

١٠ م^{٢} − ٣٠ م + ٢٥	٢ م^{٢} − ٦ م + ٥
١٠ م^{٢} − ٣٠ م + ٢٥	

وشرحهُ : بعد الحصول على حدّين في الجذر وهما م^{٢} – ٢م بالطريقة التي جرينا عليها في المثال السابق نجد ان الباقي

١٠ م^{٢} – ٢٠م + ٢٥

فنضاعف حدّي الجذر المعلومين فيحدث ٢م^{٢} – ٦م وهذا نجعله اول جزء من المقسوم عليهِ الجديد ثم نقسمهُ ١٠ م^{٢} الحدّ الاول من الباقي على ٢م^{٢} الحدّ الاول من المقسوم عليهِ يحصل ٥ نكتبها في كل من الجذر والمقسوم عليهِ ثم نضرب المقسوم عليهِ كلهُ في ٥ ونطرح الحاصل من الباقي المعلوم فلا يبقى شيء وعليهِ يكون الجواب م^{٢} – ٢م + ٥

لا بدَّ ان ترتب الحدود على حسب قوات احد الحروف اما صاعدًا او نازلاً

تمرين

اجب ما استطعت شفاهًا

جد الجذر المالي لما يأتي

(١) م^{٢} + ٤م + ٤ (٢) ٩ل^{٢} + ٦ل م + م^{٢} (٣) ك^{٢} + ٨ك + ١٦

(٤) ٤ك^{٢} – ٢٠ك ى + ٢٥ى^{٢} (٥) ل^{٨} + ٢ل^{٤}م^{٢} + م^{٤}

(٦) ٣٦ م^{٦} ٣٦ + م^{٤} + ٩م^{٢} (٧) ك^{٤} – ٤ك^{٣} + ٦ك^{٢} – ٤ك + ١

(٨) ١ – ٢م – م^{٢} + ٢م^{٣} + م^{٤} (٩) ٩ى^{٤} – ١٢ى^{٣} + ١ى^{٢} – ٤ى + ١

(١٠) ٢٥ + ٢٠ل + ١٩ل^{٢} + ٦ل^{٣} + ل^{٤}

(١١) م^{٦} – ٤م^{٥} + ٤م^{٤} + ٦م^{٣} – ١٢م^{٢} + ٩

(١٢) ٢٥ل^{٤} + ٢٠ل^{٣}م + ٩٤ ل^{٢}م^{٢} + ٢٤ل م^{٣} + ٨١م^{٤}

(١٣) ١ + ١٦م^{٦} – ٤٠م^{٤} + ١٠م – ٨م^{٢} + ٢٥م^{٣}

(١٤) ١ + ٥ى^{٢} + ٢ى^{٤} + ى^{٦} – ٤ى^{٥} + ٢ى^{٣} + ٢ى

(١٥) ٤ل^{٢} + ٤ل م – ١٦ل د + م^{٢} – ٨م د + ١٦ د^{٢}

(١٦) $\frac{٩ك^{٢}}{٤} + ك ى + \frac{ى^{٢}}{٩}$ (١٧) $١٦ل^{٤} + \frac{٤ل^{٢}م^{٢}}{٩} + \frac{١٦ل^{٢}م}{٣}$

(١٨) $\frac{٢٥ك^{٢}}{٤} + \frac{٤ى^{٢}}{٤٩} - \frac{١٠ك ى}{٧}$

(١٩) $\frac{٤٦م^{٦}}{٢٥} + \frac{١٦م^{٢}ن^{٢}}{٥} + \frac{١٦ن^{٤}}{٩}$

(٢٠) $٤٦ن^{٢} - ٩م ن + ١٢م^{٢}ن + \frac{٩م^{٢}}{١٦} - \frac{٣م^{٣}}{٢} + م^{٤}$

٣٠٣. يستنسب في هذا المقام ان يراجع الطالب كيفية استخراج الجذر المالي للاعداد وهذا قد بسطناهُ جيدًا في كتابنا "الحساب الحديث" فلتراجع فيهِ

٣٠٤ جذر المكعب. مرَّ بنا ان الجذر المكعب لـ

$ل^{٣} + ٣ل^{٢}م + ٣ل م^{٢} + م^{٣}$ هو $ل + م$

$ل^{٣} - ٣ل^{٢}م + ٣ل م^{٢} - م^{٣}$ هو $ل - م$

وعليهِ اذا وجد لدينا كمية مكعبة تامة مؤلفة من ٤ حدود فقط فجذرها المكعب يتألف من الجذر المكعب لكل من الحدين المكعبين

مثال ١. الجذر المكعب لـ: $٢٧ل^{٣} + ٥٤ل^{٢}م + ٣٦ل م^{٢} + ٨م^{٣}$

$= \sqrt[٣]{٢٧ل^{٣}} + \sqrt[٣]{٨م^{٣}} = ٣ل + ٢م$

مثال ٢. الجذر المكعب لـ: $١٢٥ل^{٦} - ٣٠٠ل^{٤} + ٢٤٠ل^{٢} - ٦٤$

$= \sqrt[٣]{١٢٥ل^{٦}} - \sqrt[٣]{٦٤} = ٥ل^{٢} - ٤$

تمرين شفاهي

جد الجذر المكعب لـ :

(١) $ك^٢ - ٦ك^٢ى + ١٢ك ى^٢ - ٨ى^٢$

(٢) $٨ل^٢ + ١٢ل^٢م + ٦ل م^٢ + م^٢$

(٣) $٢٧ل^٢ - ١٣٥ل^٢ى + ٢٢٥ل ى^٢ - ١٢٥ى^٢$

(٤) $م^٦ + ١٢م^٤ن^٢ + ٤٨م^٢ن^٤ + ٦٤ن^٦$

(٥) $د^٢ - ٢د^٢ب + \frac{٤}{٩}د ب^٢ - \frac{٨}{٢٧}ب^٢$

(٦) $٢١٦ل^٢ + ٦ل^٢ى + ٢ل ى^٢ + ٨ى^٢$

القسم الثاني

٣٥٠. استخراج الجذر المكعب للكميات المركبة. معلوم ان :

$(ل + م)^٢ = ل^٢ + ٣ل^٢م + ٣ل م^٢ + م^٢$. فيجب ان نبحث عن طريقة عامة تمكننا من استخراج الحدين ل وم اذا فرضت الكمية $ل^٢ + ٣ل^٢م + ٣ل م^٢ + م^٢$

وقبل كل شيء نرتب حدود الكمية حسب قوات احد الحروف ثم نلاحظ ان اول حدّ في الجذر هو "ل" وهو الجذر المكعب للكمية $ل^٢$ التي هي اول حدّ في الكمية المفروضة . وعليه نأخذ الجذر المكعب للحدّ $ل^٢$ اول حدّ في الكمية المفروضة فتكون النتيجة ل اول حدّ في الجذر المطلوب استخراجه . ثم نطرح مكعب ل اي $ل^٢$ من الكمية فيكون الباقي

$$٣ل^٢م + ٣ل م^٢ + م^٢ = م(٣ل^٢ + ٣ل م + م^٢)$$

وهذا يظهر جليًا ان الحد الثاني "م" يستخرج بقسمة الباقي على الكمية $(٣ل^٢ +$

٢ ل م + م٢) وهذا المقسوم عليه مؤلف من

(١) ثلاثة اضعاف مربع ل التي هي الحدّ الاول من الجذر

(٢) ثلاثة اضعاف حاصل ضرب الحدّ الاول في الحد الثاني م

(٣) مربع م الحد الثاني في الجذر

ولاجل سهولة العمل نضعه في الشكل الآتي :

ل٣ + ٣ ل٢ م + ٣ ل م٢ + م٣ (ل + م

ل٢

٣ ل٢ م + ٣ ل م٢ + م٣	٣ . ل٢ = ٣ ل٢
	٣ . ل . م = + ٣ ل م
	م٢ = + م٢
٣ ل٢ م + ٣ ل م٢ + م٣	٣ ل٢ + ٣ ل م + م٢

مثال ١ . جد الجذر المكعب لـ : ٨ ل٦ − ٣٦ ل٥ + ٦٦ ل٤ − ٦٣ ل٣ + ٣٣ ل٢ − ٩ ل + ١

٨ ل٦ − ٣٦ ل٥ + ٦٦ ل٤ − ٦٣ ل٣ + ٣٣ ل٢ − ٩ ل + ١ (٢ ل٢ − ٣ ل + ١

٨ ل٦

− ٣٦ ل٥ + ٦٦ ل٤ − ٦٣ ل٣	٢ . (٢ ل٢) = ١٢ ل٤
	٢ . (٢ ل٢) (− ٣ ل) = − ١٨ ل٣
	(− ٣ ل)٢ = + ٩ ل٢
− ٣٦ ل٥ + ٥٤ ل٤ − ٢٧ ل٣	١٢ ل٤ − ١٨ ل٣ + ٩ ل٢

١٢ ل٤ − ٣٦ ل٣ + ٣٣ ل٢ − ٩ ل + ١	٢ (٢ ل٢ − ٣ ل) = − ١٢ ل٤ + ٣٦ ل٣ − ٢٧ ل٢
	٣ (٢ ل٢ − ٣ ل)٢ . ١٠ = + ٦ ل٢ − ٩ ل
	١٠ = + ١
١٢ ل٤ − ٣٦ ل٣ + ٣٣ ل٢ − ٩ ل + ١	٢ ل٢ − ٣ ل + ١

فيكون الجذر المكعب ٢ ل٢ − ٣ ل + ١

تمرين كتابي

جد الجذر المكعب لما يأتي :

(١) $١ + ٣م + ٦م^{٢} + ٧م^{٣} + ٦م^{٤} + ٣م^{٥} + م^{٦}$

(٢) $١ - ٦ل + ٢١ل^{٢} - ٤٤ل^{٣} + ٦٣ل^{٤} - ٥٤ل^{٥} + ٢٧ل^{٦}$

(٣) $ى^{٦} - ٣ى^{٥} + ٦ى^{٤} - ٧ى^{٣} + ٦ى^{٢} - ٣ى + ١$

(٤) $٨م^{٦} + ١٢م^{٥} - ٣٠م^{٤} - ٣٥م^{٣} + ٤٥م^{٢} + ٢٧م - ٢٧$

(٥) $٢٧ل^{٦} - ٢٧ل^{٥} - ١٨ل^{٤} + ١٧ل^{٣} + ٦ل^{٢} - ٣ل - ١$

(٦) $٢٤٣م^{٢} + ١٦م + ٢٧م^{٦} + ١٧١م^{٤} - ٢٧م^{٥} - ١٩م^{٣} - ١٠٨م$

(٧) $ل^{٣} + ٣ل^{٢}م - ٣ل^{٢}د + ٣ل م^{٢} - ٦ل م د + ٣ل د^{٢} + م^{٣} - ٣م^{٢}د + ٣م د^{٢} - د^{٣}$

(٨) $\frac{٢٧ل^{٣}}{٦٤ى^{٣}} - \frac{٢٧ل^{٢}}{٨ى^{٢}} - \frac{٩ل}{ى} - ٨$

(٩) $\frac{ل^{٣}}{٢٧} - \frac{ل^{٢}}{٣} + ٣ل - ٧ + \frac{١٨}{ل} - \frac{٢٧}{ل^{٢}} + \frac{٢٧}{ل^{٣}}$

(١٠) $\frac{ل^{٣}}{م^{٣}} - \frac{٣ل^{٢}}{م^{٢}} + \frac{٦ل}{م} - ٧ + \frac{٦م}{ل} - \frac{٣م^{٢}}{ل^{٢}} + \frac{م^{٣}}{ل^{٣}}$

القانون لمعرفة قوة آلة السيارة هو ح $= \frac{ق^{٣} ع}{٣٠٠٠٠}$ حيث ح تمثل عدد الاحصنة وق قطر الاسطوانة معبرًا عنه بالنيراط وع عدد الاسطوانات

اسم السيارة	عدد الاسطوانات	قطر الاسطوانة قيراطاً
دودج	٤	٤ ٧/٨
فورد	٤	٤ ٤/٤
اوفرلند ٩١	٤	٤ ٤/٨
شفروله ممتاز	٤	٤ ١١/١٦
بيوك ٤٤	٦	٤ ٤/٨
شامرس	٦	٤ ١/٤
هدصن	٦	٤ ١/٢
مارمون ٣٤	٦	٤ ٤/٤
بيرس آرو ٤٤	٦	٤
رولس رويس	٦	٤ ١/٢
كاديلاك ٦١	٨	٤ ١/٨
لنكلن	٨	٤ ٤/٨
باكرد	١٢	٤

(١١) جد قوة آلة كل من السيارات المدونة في الجدول

(١٢) اكتب جدولاً في السيارات التي تعرفها واذكر عدد الاسطوانات وقياس قطرها ثم استخرج قوة الآلة

الفصل الرابع عشر

الجذور

القسم الاول

٣٠٦. الاعداد المنطقة هي الخارج من قسمة عددين صحيحين وتتألف من جميع الاعداد الصحيحة الايجابية والسلبية وجميع الكسور الدراجة والعشرية السلبية والايجابية والصفر

٣٠٧. جذر الكمية هو كمية اذا رفعت الى القوة المساوية لدليل الجذر نتجت تلك الكمية . ويدل على جذر الكمية بوضعها تحت علامة الجذر هكذا

$\sqrt[4]{16}$; $\sqrt[n]{ك}$ وهلم جرًا

٣٠٨. جذر الكمية الرئيسي هو جذرها الحقيقي الذي يكون مسبوقًا بنفس العلامة التي تسبق الكمية ذاتها نحو $\sqrt[2]{9} = +3$ و $\sqrt[3]{27} = +3$ و $\sqrt[3]{-27} = -3$

وسوف نقتصر الان في بحثنا على جذر الكميات الرئيسية

٣٠٩. بسط الجذور يحق لنا ان نغير شكل الجذر وهيئته بشرط ان لا نتغير قيمته العددية وذلك لاسباب اهمها سهولة العمل واختصاره

مثال ١. $\sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

مثال ٢. وعلى العموم $\sqrt[ن]{أ^{ن} ج} = \sqrt[ن]{أ^{ن}} \cdot \sqrt[ن]{ج} = أ \sqrt[ن]{ج}$

مثال ٣. $\sqrt{٥٤} = \sqrt{٢٧ \times ٢} = \sqrt{٢٧} \cdot \sqrt{٢} = ٣\sqrt{٢}$

مثال ٤. وعلى العموم $\sqrt{أ^{٢} ج} = \sqrt{أ^{٢}} \cdot \sqrt{ج} = أ\sqrt{ج}$

فنستنتج من الامثلة المارّ ذكرها انه يمكننا بسط الجذر بقسمته الى ضلعين يكون احدهما اكبر قوة تامة لدرجة دليل الجذر. ثم نستخرج جذر هذا الضلع ونجعله معمّى للضلع الآخر الذي يبقى تحت العلامة الجذرية

والعرب اول من انتبه الى هذا المبدإ فبسطه كتبتهم واظهروا جليًّا ان $\sqrt{أ^{٢} ج} = أ\sqrt{ج}$

وان $\sqrt{ب ت} = \sqrt{ب} \cdot \sqrt{ت}$

تمرين

اجب ما استطعت شفاهًا

ابسط ما يأتي:

(١) $\sqrt{٨}$; $\sqrt{١٢}$; $\sqrt{٢٧}$; $\sqrt{٧٥}$; $\sqrt{١٢٥}$; $\sqrt{١٦٣}$; $\sqrt{٣٠٥}$

$\sqrt{٢٢}$; $\sqrt{٤٨}$; $\sqrt{ب^{٢}}$; $\sqrt{٤ب}$; $\sqrt{٩ل}$; $\sqrt{١٦م}$

$\sqrt{ك^{٥}}$; $\sqrt{٢٥٠}$; $\sqrt{٨ \frac{١}{٢}}$; $\sqrt{٣٧ \frac{١}{٢}}$; $\sqrt{٩م^{٢}}$

$\sqrt{١٢ \frac{١}{٢}}$; $\sqrt{١٦م^{٢}}$; $\sqrt{٥د^{٢}}$

(٢) $\sqrt{١٦}$; $\sqrt{٢٤}$; $\sqrt{٢٢}$; $\sqrt{٤٠}$; $\sqrt{٤٨}$; $\sqrt{٧٢}$

$\sqrt{٨١}$; $\sqrt{١٠٨}$; $\sqrt{١٢٨}$; $\sqrt{٥م^{٢}}$; $\sqrt{٧ل^{٢}}$; $\sqrt{٤ى}$

؛ $\sqrt[4]{٢ك^{٢}}$ ؛ $\sqrt[4]{٨ك}$ (٣) $\sqrt[4]{٣٤}$ ؛ $\sqrt[4]{٥٤^{١/٩}}$ ؛ $-\sqrt[4]{٤٠}$

$-\sqrt[4]{٢٨}$ ؛ $\sqrt[4]{٤٥^{٢/٣}}$ ؛ $\sqrt[4]{٥م^{٢٠}}$ ؛ $\sqrt[4]{٨ك^{٤}}$ ؛ $\sqrt[4]{٢٩ل}$

(٤) $\sqrt[4]{٧٢^{١/٢}}$ (٥) $-\sqrt[4]{١٠٨^{٣/٤}}$ (٦) $\sqrt[4]{٤٨}$ (٧) $\sqrt[4]{١٢٨ل^{٥}م^{٢}}$

(٨) $\sqrt[4]{٤م^{٦}ن^{٧}}$ (٩) $-\sqrt[4]{٨ل^{٢}م^{٢}}$ (١٠) $\sqrt[4]{٢٠٠ى^{٧}}$

(١١) $\sqrt[4]{١٤٧ل^{٧}ى^{٨}}$ (١٢) $-\sqrt[4]{٦٤ل^{١١}ى^{١٠}}$

(١٣) $\sqrt[4]{-٨١ك^{٦}م^{٧}}$ (١٤) $\sqrt[4]{د^{٢}(ل-م)^{٢}}$

(١٥) $\sqrt[4]{ل(ل(ك-ى)^{٢}}$ (١٦) $\sqrt[4]{٤(ل+م)^{٢}ى}$

(١٧) $(ل-م)\sqrt[4]{(ل+م)^{٢}د}$ (١٨) $\sqrt[4]{(ل+م)(ل^{٢}-م^{٢})}$

(١٩) $\sqrt[4]{(د+٢)(د^{٢}-٩)}$ (٢٠) $\sqrt[4]{٣م^{٢}-٨م+٨}$

(٢١) $\sqrt[4]{٣ل^{٢}-٣٠ل+٧٥}$

٣١٠. درجة الجذر او رتبتهُ يدل عليها دليله فمثلاً درجة $\sqrt[٥]{ك}$ الخامسة

٣١١. الجذور المتشابهة هي من ذات الدرجة ولها ذات الكميات تحت علامة الجذر. مثل $٢\sqrt[4]{م}$ و $-٥\sqrt[4]{م}$

فالجذور المتشابهة تتفق فقط في الدرجة وفي الكمية الواقعة تحت الجذر اما في العلامة وفي المعنى فيمكن ان تتفق ويمكن ان تختلف لانها ليست جوهرية

٣١٢. جمع الجذور المتشابهة وطرحها يتمان كجمع وطرح الحدود

متشابهة تماماً وذلك بضم المسميات وطرحها وجعلها مسمّى واحداً للكمية التي تحت الجذر كما تصلح جميع الحدود ونجعلها حداً واحداً.

مثلاً $٣\sqrt{٢} - ٥\sqrt{٢} + ٧\sqrt{٢} - ٤\sqrt{٢}$

اما اذا كانت الجذور غير متشابهة وذلك اذا اختلفت في الدرجة او في الكمية تحت الجذر فلا يمكن اختصارها واصلاحها بل يدل على العمليات دلالة

مثلاً $\sqrt{٥}$ و $٣\sqrt{٢}$ و $٢\sqrt{٥}$ غير متشابهة ومجموعها يكتب هكذا:

$$\sqrt{٥} + ٣\sqrt{٢} + ٢\sqrt{٥}$$

تمرين كتابي

اجب ما استطعت شفاهاً

ابسط ما يأتي:

(١) $٣\sqrt{٢} + ٣\sqrt{٢}$ (٢) $٣\sqrt{٢} + ٥\sqrt{٢}$ (٣) $٥\sqrt{٢}$

(٤) $-٣\sqrt{٢}$ (٥) $١٢\sqrt{٥} - ٥\sqrt{٥}$ (٦) $٦\sqrt{٢} - ٦\sqrt{٢}$

(٦) $٥\sqrt{٣} + ١٢\sqrt{٣}$ (٧) $٨\sqrt{٧} - ٢٨\sqrt{٧}$ (٨) $١٢\sqrt{٢}$

(٩) $-٣\sqrt{٢}$ (١٠) $٢٧\sqrt{٢٢} - ١٢\sqrt{٢٢} + ٥٠\sqrt{٢٢} + ٨\sqrt{٢٢}$

(١١) $٢\sqrt{ك} + ٢\sqrt{ك}$ (١٢) $٢\sqrt{ك} + ٤\sqrt{ك}$

(١٣) $م^{٢} + ل^{٢} م$ (١٤) $-٢م^{٢} + ١٦م$ (١٥) $٤ك^{٢}$

$+٢٥ك^{٢}$ (١٦) $٢٤م^{٢} + ٥٠م - ٦م^{٢}$ (١٧) $٧^{٢٤}$

$-٢٧^{٢} + ٢٧^{٢}$ (١٨) $٨^{٢} + د^{٢} + ٢٢^{٢}$

(١٩) $١٢^{٢} - ٢٧^{٢}$ (٢٠) $٥٠^{٢} - ٢٢^{٢}$ (٢١) $٤٠٢٢ + ٢٥^{٢}$

(٢٢) $٨م^{٢} + ٥٠م^{٢}$ (٢٣) $٨^{٢} + ٢٢^{٢} - ٥٠^{٢}$

(٢٤) $١٦^{٢٤} - ٥٤^{٢٢}$ (٢٥) $٢٤^{٢٥} - ٢٢^{١٨}$

(٢٦) $٢٧^{٢/٣} - ١٢^{٢}$ (٢٧) $٢٠^{٢٢} - ٨٠^{٢/٣} + ٤٥^{٢}$

(٢٨) $١٨ك^{٢}ى - ٢٢ك^{٤}ى^{٢} + ٨ى^{٥}$

(٢٩) $٢ل^{٢}م^{٢}ن + ٥ل^{٢}م^{٢}ن - ل^{٢}ن^{٢}$

(٣٠) $٢٢^{٢}د + ٢٤^{٢}٥٤د - ١٦^{٢}د$

(٣١) $١٢^{٢٢}ل^{٢}م + ٤٨^{٢٢}ل - ٢٢^{٢٦}ل^{٢}م^{٢}$

(٣٢) $٢٢^{٢٤}ل + ٢٥٠^{٢٤}ل^{٢}م^{٢} - ٢٤^{٢٢}م^{٢}٥ل$

(٣٣) $ل^{٢}م^{٢}ن - ل^{٢}م^{٢}ن^{٢} + ل^{٢}ن$

(٣٤) $٢٧^{٢/٣} - ١٨^{٢} + ٣٠٠^{٢} - ١٦٢^{٢} + ٨^{٢}$

(٣٥) $٧ل^{٢}١٢^{٢}ل^{٢}م^{٢} - ٢٧^{٢}ل^{٢} + ٣٠٠^{٢}ل^{٢}م^{٢}$

٣١٣. ضرب الجذور . اذا كانت الجذور من حدٍّ واحد ومن ذات الدرجة فضربها يتم كما في الامثلة الآتية :

$\sqrt{٩} \times \sqrt{٤} = ٣ \times ٢ = ٦$

ومعلوم ان $\sqrt{٩ \times ٤} = \sqrt{٣٦} = ٦$

فاذًا $\sqrt{٩} \times \sqrt{٤} = \sqrt{٩ \times ٤}$ لان كلاً منها يساوي ٦

وبطريقة التعميم نقول ان $\sqrt{ك} \times \sqrt{ى} = \sqrt{ك ى}$

كذلك $\sqrt{٣} \times \sqrt{٤} = \sqrt{١٢}$ ، $\sqrt{١٢} \times \sqrt{٣} = \sqrt{٣٦}$

ومثله $\sqrt{٢ م^{٢} ن^{٢}} \times \sqrt{٥ م^{٢} ن^{٢}} = \sqrt{١٠ م^{٤} ن^{٤}} = م^{٢} ن^{٢} \sqrt{١٠}$

فاذًا لضرب جذرين من ذات القوة (متّفقتي الدليل) نضرب المسميات بعضها في بعض والكميات تحت علامة الجذر بعضها في بعض ثم نبسط الحاصل

٣١٤. اذا لم تكن الكميات تحت الجذور بابسط صورها فالافضل بسطها قبل الضرب لان ذلك يسهّل العمل كثيرًا

تمرين شفهي

اضرب وابسط ما يأتي :

(١) $\sqrt{٣} \cdot \sqrt{٣}$ ؛ $\sqrt{٣} \cdot \sqrt{٣}$ ؛ $\sqrt{٥} \cdot \sqrt{٣}$ ؛ $\sqrt{٣} \cdot \sqrt{٦}$

$\sqrt{ل} \cdot \sqrt{٢ل}$ ؛ $\sqrt{٣} \cdot \sqrt{١٨}$ ؛ $\sqrt{٢ل} \cdot \sqrt{٣ل}$ ؛ $\sqrt{٢ل^{٢}} \cdot \sqrt{٣}$

$\overline{أ ب}^{٢} \times \overline{أ م}^{٢}$; $\overline{أ م}^{٢} \times \overline{ب ك}^{٢}$; $\overline{ب م}^{٢} \times \overline{ب ك}^{٢}$; $\overline{ب ك}^{٢} \times \overline{ب م}^{٢}$

(٢) $\overline{أ ب}^{٢} \cdot \overline{أ ك}^{٢}$; $\overline{أ م}^{٢} \cdot \overline{أ ك}^{٢}$; $\overline{ب م}^{٢} \cdot \overline{ب ك}^{٢}$; $\overline{ب ك}^{٢} \cdot \overline{ب م}^{٢}$

$\overline{ك ر}^{٢} \cdot \overline{ك ع}^{٢}$; $\overline{ع ل}^{٥} \times \overline{ع ل}^{٤}$

تمرين كتابي

اضرب وابسط ما يأتي :

(١) $\overline{١٢ أ}^{٢} \cdot \overline{٢٧ أ}^{٢}$ (٢) $\overline{١٥ أ}^{٢} \times \overline{١٢ أ}^{٢}$ (٣) $\overline{١٢ أ}^{٢} \cdot \overline{٢٠ أ}^{٢}$

(٤) $\overline{٢١ أ}^{٦} \times \overline{٧ أ}^{٥}$ (٥) $\overline{١٦ أ}^{٤} \times \overline{٣ أ}^{١٢}$ (٦) $\overline{١٠ أ}^{٢} \cdot \overline{ن أ}^{٥}$

(٧) $\overline{ل م}^{٢} \cdot \overline{ل م}^{٢}$ (٨) $\overline{ل ل}^{٢} \cdot \overline{ل ل}^{٥}$ (٩) $\overline{م}^{٢\frac{١}{٢}} \cdot \overline{م}^{٢}$

(١٠) $\overline{م}^{٢\frac{١}{٨}} \cdot \overline{ن}^{٢\frac{٥}{٦}}$ (١١) $\overline{م ن}^{٢} \times \overline{١٥ أ}^{٢}$

(١٢) $\overline{٢٨ أ}^{٢\frac{٢}{٣}} \cdot \overline{٣٥ أ}^{٢\frac{٤}{٥}}$ (١٣) $\overline{٦ أ}^{٢\frac{١}{٢}} \times \overline{٤ أ}^{٢\frac{٤}{٥}}$

(١٤) $\overline{د ن}^{٢} \cdot \overline{٢٥ د}^{٢}$ (١٥) $\overline{ك ك}^{٢} \times \overline{ك ك}^{٢\frac{٥}{٨}}$

(١٦) $\overline{٥ أ}^{٢} \times \overline{٦ أ}^{٢} \times \overline{٢ أ}^{٢}$ (١٧) $\overline{١٢ أ}^{٢} \cdot \overline{٦ أ}^{٢} \cdot \overline{٢٠ أ}^{٢}$

(١٨) $\overline{أ}^{٢\frac{١}{٢}} \cdot \overline{أ}^{٢\frac{٢}{٥}} \cdot \overline{أ}^{١٠\frac{١}{٢}}$ (١٩) $\overline{ل م}^{٢} \cdot \overline{م ن}^{٢} \cdot \overline{ن ل}^{٢}$

(٢٠) $\overline{ل م}^{٢} \cdot \overline{م ن}^{٢} \cdot \overline{ن ل}^{٢}$ (٢١) $\overline{أ}^{٢} (\overline{أ}^{٢} - \overline{أ}^{٥})$

(٣٣) $٢م^{٢}$ $(م^{٢} - ٢^{٢})$ (٣٤) $٥^{٢}$ $(م^{٢} - م^{٢} + ٢^{٢})$

اجعل مبنى الكميات الآتية واحداً [١]

(٣٤) $٤م^{٢} - ١٦^{٢} \cdot م^{٢} - ٤٨^{٢}$ وهو الجواب

(٣٥) $٥^{٢}$ (٣٦) $٢^{٢}$ (٣٧) $١٧^{٢}$

(٣٨) $١\frac{١}{٢}^{٢}$ (٣٩) $\frac{١}{٢}^{٢}$ (٤٠) $٥\frac{٥}{٦}^{٢}$

(٤١) $ل^{٢}م$ (٤٢) $م^{٢}ى$ (٤٣) $٤ل^{٢}ص^{٢}$

(٤٤) $(د + ى)^{٢}د + ى^{٢}$

تمرين شفهي عام

ابسط ما يأتي:

$٨^{٢}$; $٦^{٢} \cdot ٣^{٢}$; $٢٧^{٢}\frac{١}{٢}$; $٢^{٢}ل \cdot ل^{٢}$; $م^{٢}$

$٦م^{٢} \cdot ٣^{٢}$; $١٠^{٢} \cdot ٣^{٢}$; $١٢^{٢} - م^{٢}$; $ل^{٢}م^{٢}$

$٨^{٢} + ٢م^{٢}$; $٤ل^{٢}ى^{٢}$; $٢٧^{٢} - ٥م^{٢}$; $د^{٢}ك^{٢} + د^{٢}ك^{٢}$

$١٦^{٢} \cdot ٣^{٢}$; $٢^{٢}ل \cdot ٥^{٢}ل + ٩^{٢}٥$; $ك^{٢} - ى^{٢} \cdot ك^{٢} - ى$

$١٢^{٢} + ٢٧^{٢}$; $٦^{٢} \cdot م^{٢}$; $م^{٢}م^{٢} + م^{٢}م^{٢}$; $٢^{٢} \cdot ٦^{٢}$

$\sqrt{٢}د^{٢}$ + $\sqrt{٣}د$; $\sqrt{٥}٨$ – $\sqrt{٢}٢$; $\sqrt{٢}د$; – $\sqrt{٢}د$

$\sqrt{٢}٠٨$ ½ ; $\sqrt{٢}٥\times\sqrt{٢}٢$; $\sqrt{٤}+\sqrt{٨}+\sqrt{٩}$

$\sqrt{١٦}-\sqrt{٨}+\sqrt{٣}$; $\sqrt{٢٤\times٦}-\sqrt{٤٥}$; $\sqrt{١٢}+\sqrt{٢٧}$

القسم الثاني

٣١٥. اذا كانت الكمية تحت علامة الجذر مما لا يمكن استخراج جذرها تماماً او بالضبط فجذرها يسمّى اصم. مثل $\sqrt{٣}$ و$\sqrt{٥}$ و$\sqrt{٣}ب$ و$\sqrt{٢}ل+م$

ويقال احياناً للجذر الاصم "سرد" او كمية غير جذرية

٣١٦. ولا يمكن معرفة او تقدير قيمة الجذر الاصم بالضبط التام اي لا يمكن التعبير عنهُ كعدد صحيح او ككسر دارج او كسر عشري تام (منتهي) ولكن يمكن استخراج قيمتهُ "بالتقريب" وهذه القيمة تزداد قرباً كلما زدنا عدد الارقام العشرية في النتيجة

مثلاً $\sqrt{٥}$ = ٢٫٢٣٦٠٦٨... الى ما لا نهاية لهُ

فنستنتج ان $\sqrt{٥}$ اكثر من ٢٫٢٣٦٠٦ واقل من ٢٫٢٣٦٠٧ وحينئذٍ يكون الخطأ اقل من ٠٫٠٠٠١. اذا استعملنا احدى هاتين القيمتين بدل $\sqrt{٥}$ ولكن اذا زدنا عدد الارقام العشرية انقصنا الخطأ اكثر فاكثر وازددنا قرباً من الحقيقة

٣١٧. بسط الكسور تحت علامة الجذر يتم بضرب كلٍّ من صورة الكسر ومخرجهِ في اصغر كمية التي تجعل المخرج كمية "جذرية" اي مما يمكن استخراج جذرها تماماً

مثال ١. $\sqrt[3]{\frac{٢}{٤}} = \frac{\sqrt[3]{٢ \times ٢}}{\sqrt[3]{٢ \times ٢}} = \frac{\sqrt[3]{٦}}{\sqrt[3]{٦ \times ٦}} = \frac{١}{٦}\sqrt[3]{٦}$

مثال ٢. $\sqrt[3]{\frac{٩}{٥}} = \frac{\sqrt[3]{٩ \times ٥}}{\sqrt[3]{٥ \times ٥}} = \frac{\sqrt[3]{٤٥}}{٥} = \frac{١}{٥}\sqrt[3]{٥ \times ٩} = \frac{٣}{٥}\sqrt[3]{٥}$

مثال ٣. $\sqrt[3]{\frac{٥ د ك^{٢}}{١٨ ى}} = \sqrt[3]{\frac{٥ د ك^{٢}}{١٨ ى} \times \frac{٢ ى}{٢ ى}} = \frac{\sqrt[3]{٢٦ ى^{٢} ك^{٢} \times ١٠ د ى}}{٢ ى}$

$= \frac{ك}{٦ ى}\sqrt[3]{١٠ د ى}$

تمرين كتابي

اجب ما استطعت شفاهًا

ابسط:

(١) $\sqrt[3]{\frac{١}{٢}}$; $\sqrt[3]{\frac{١}{٤}}$; $\sqrt[3]{\frac{١}{٥}}$; $\sqrt[3]{\frac{١}{ى}}$; $\sqrt[3]{\frac{٣}{٤}}$; $\sqrt[3]{\frac{٣}{٤}}$

$\sqrt[3]{\frac{١}{٥}}$; $\sqrt[3]{\frac{٣}{د^{٢}}}$; $\sqrt[3]{\frac{٢ د ى}{٥}}$; $ى\sqrt[3]{\frac{ى}{د^{٢}}}$

(٢) $\sqrt[3]{\frac{٥}{١٦}}$; $\sqrt[3]{\frac{٣}{٢}}$; $\sqrt[3]{\frac{٣}{٢}}$; $\sqrt[3]{\frac{٣}{٨}}$; $\sqrt[3]{\frac{٤}{٣}}$; $٢\sqrt[3]{\frac{١٥}{١٦}}$

$٥\sqrt[3]{\frac{٥}{٦}}$; $\sqrt[3]{\frac{٧٠}{٢}}$; $\sqrt[3]{\frac{٣}{د^{٢}}}$

(٣) $٤\sqrt[3]{\frac{٤}{٣}}$ (٤) $٥\sqrt[3]{\frac{٥}{٦}}$ (٥) $٦\sqrt[3]{\frac{٦}{٥}}$ (٦) $١٠\sqrt[3]{\frac{١٠}{٢٧}}$

(٧) $\sqrt[3]{\frac{١٠}{٢٧}}$ (٨) $ى\sqrt[3]{\frac{٢١ ب}{ى}}$ (٩) $٥\sqrt[3]{\frac{ب^{٢} ت}{٨}}$ (١٠) $\sqrt[3]{\frac{ك ى}{١٢}}$

(١١) $\sqrt[3]{\frac{٣٤}{٢٥}}$ (١٢) $\frac{٣}{٤}\sqrt[3]{\frac{٤}{٣}}$ (١٣) $٥م\sqrt[3]{\frac{٣}{٢٥}}$ (١٤) $\frac{ن}{د}\sqrt[3]{\frac{٨ ن^{٢}}{٢٧ د}}$

(١٥) $\sqrt[3]{\frac{٧}{ب + ت}}$ (١٦) $\sqrt[3]{\frac{٣}{(ى + ١)^{٢}}}$ (١٧) $\sqrt[3]{٧٠}$ (١٨) $\sqrt[3]{٦٦\frac{٢}{٣}}$

٣١٨. بسط الجذور وجمعها وطرحها

مثال ١. ابسط: $٢\sqrt{٥} + ٤\frac{١}{٥}\sqrt{٢} - ٢\frac{١}{٢}\sqrt{٥}$

$$-٢\sqrt{٥} + \frac{١}{٥}\sqrt{٥} + ٦\sqrt{٢} - \frac{٥}{٢}\sqrt{٥}$$

$$-٤\sqrt{٥} + ٦\sqrt{٢} \quad .$$

مثال ٢. ابسط: $(د - ٢ن)\sqrt{٢} + ٢\sqrt{(٢د + ن)^{٢}}$

$$-(د - ٢ن)\sqrt{٢} + (٢د + ن)\sqrt{٢}$$

$$-(٣د - ن)\sqrt{٢}$$

تمرين كتابي

ابسط ما يأتي:

(١) $\sqrt{٢} + \frac{٣}{٤}\sqrt{٢}$ (٢) $\frac{٣}{٤}\sqrt{٥} + \frac{١}{٥}\sqrt{٥}$ (٣) $د\sqrt{ك} + ك\sqrt{\frac{د}{ك}}$

(٤) $٤\sqrt{\frac{١}{٢}} + ٢\sqrt{\frac{٤}{٣٣}}$ (٥) $٢٧\sqrt{\frac{٥}{٢}} - ١٢\sqrt{\frac{٥}{٢}} + ٦\sqrt{٠.٦} - ٣٢٠\sqrt{\frac{١}{١٠}}$

(٦) $٢\sqrt{٥} - ١٠\sqrt{\frac{١}{٢}} + ٢\sqrt{٤٥} - ٥\sqrt{٤٣\frac{١}{٢}}$

(٧) $٢\sqrt{٨} + ٥\sqrt{\frac{١}{٢}} - ٦\sqrt{٣} + ٢٧\sqrt{\frac{١}{٤٣}}$

(٨) $٢\sqrt{٥} - ٣\sqrt{\frac{١}{٢}} + ٦\sqrt{١٢٥} - ٦\sqrt{٤٣\frac{١}{٢}}$

(٩) $٢\sqrt{٦٣} - ٣\sqrt{\frac{١}{٢}} - \sqrt{\frac{٢}{٣}} + \frac{١}{٥}\sqrt{٥٤} - ٨\sqrt{\frac{٤}{٣}}$

(١٠) $٢\sqrt{١٦٣} - ٣\sqrt{١٢١} + ٢\sqrt{٤٥} - ٥\sqrt{٢٧}$

(١١) $٢\sqrt[٤]{٥٤} - ٢\sqrt[٤]{١٨} + ٥\sqrt[٤]{\frac{١}{٤}} + ٥\sqrt[٤]{\frac{١}{٢}}$

(١٢) $\sqrt[٤]{١٢٨} + ٢\sqrt[٤]{\frac{١}{٤}} - ٢\sqrt[٤]{١٨} + \sqrt[٤]{٥٤}$

(١٣) $٢(٢د+ى)\sqrt[٥]{٥} + ٥\sqrt[٥]{(٢د+ى)^{٢}}$

(١٤) $٥\sqrt[٣]{ك^{٢}ى} + ٢\sqrt[٣]{كى+ى} - ٢\sqrt[٣]{(ك+١)^{٢}ى}$

(١٥) $\sqrt[٤]{٤ى^{٣}} + \sqrt[٤]{٤ى^{٢}+ى} + ٤\sqrt[٤]{(ى+١)^{٢}ى}$

٢١٩. ضرب الجذور

مثال ١. اضرب $\sqrt[٣]{ك-ى}$ في $\sqrt[٣]{ك^{٢}-ى^{٢}}$

$$\sqrt[٣]{ك-ى} \cdot \sqrt[٣]{ك^{٢}-ى^{٢}} = \sqrt[٣]{(ك-ى)(ك^{٢}-ى^{٢})}$$

$$= -\sqrt[٣]{(ك-ى)^{٢}(ك+ى)} = -(ك-ى)\sqrt[٣]{ك+ى}$$

مثال ٢. اضرب $٢\sqrt[٥]{٥} - ٤\sqrt[٥]{٣}$ في $٢\sqrt[٥]{٥} + \sqrt[٥]{٣}$

الحل :

$$\begin{array}{r} ٢\sqrt[٥]{٥} - ٤\sqrt[٥]{٣} \\ \underline{٢\sqrt[٥]{٥} + \sqrt[٥]{٣}} \\ ٢٠ - ٨\sqrt[٥]{١٥} \\ \underline{+ ٢\sqrt[٥]{١٥} - ١٢} \\ ٢٠ - ٥\sqrt[٥]{١٥} - ١٢ = ٨ - ٥\sqrt[٥]{١٥} \end{array}$$

تمرين كتابي

اضرب وابسط ما يأتي :

(١) $\sqrt{ب - د} \cdot \sqrt{٣(ب - د)}$ (٢) $\sqrt{٢(ب + د)} \cdot \sqrt{٨(ب + د)}$

(٣) $\sqrt{ب^{٢} - د^{٢}} \cdot \sqrt{ب + د}$ (٤) $\sqrt{٣٥} \cdot \sqrt{٣(ب - د)^{٢}}$

(٥) $\sqrt{٣م - ى} \cdot \sqrt{٤م^{٢} - ى^{٢}}$ (٦) $\sqrt{م - ن} \cdot \sqrt{(م - ن)^{٥}}$

(٧) $\sqrt{م^{٢} - ن^{٢}} \cdot \sqrt{(م - ن)(م - ٢ن)}$

(٨) $\sqrt{م^{٢} - ٤م ن + ٢ن^{٢}} \cdot \sqrt{م^{٢} - ن^{٢}}$

(٩) $(٢\sqrt{٣م} + \sqrt{٦} - \sqrt{٥}) \cdot \sqrt{٣م}$

(١٠) $\sqrt{٢٣} \cdot (\sqrt{٣م} - \sqrt{٦} + ٢\sqrt{١٠})$ (١١) $(٣ + \sqrt{٢})(٢ - ٢\sqrt{٢})$

(١٢) $(\sqrt{٢} + ٥)(٣\sqrt{٢} - ٤)$ (١٣) $(٢\sqrt{٣م} + ٣)(\sqrt{٣م} - ٥)$

(١٤) $(٥ + ٢\sqrt{٥})^{٢}$ (١٥) $(٥\sqrt{٥} + ٢\sqrt{٣م})(٢\sqrt{٥} - ٣\sqrt{٣م})$

(١٦) $(٦\sqrt{٥} - ٢\sqrt{٣م})^{٢}$ (١٧) $(٣\sqrt{٣م} + ٥\sqrt{٢})(٢\sqrt{٣م} + ٣\sqrt{٢})$

(١٨) $(٣\sqrt{٦} - ٢\sqrt{٥})(١٢\sqrt{٥} + ١٢\sqrt{٦})$

(١٩) $(\sqrt{د} + ٢\sqrt{ى})(\sqrt{د} - ٢\sqrt{ى})$

(٣٠) $(\sqrt[4]{م}+\sqrt[4]{ن})(\sqrt[4]{م^{٣}}+\sqrt[4]{ن^{٣}})$

(٣١) $(\sqrt[4]{د^{٣}}+\sqrt[4]{ى^{٣}})(\sqrt[4]{د}-\sqrt[4]{ى^{٣}})$

(٣٢) $(\sqrt[4]{ب}+\sqrt[4]{ت}+\sqrt[4]{د})\sqrt[4]{ب ت د}$

(٣٣) $(\sqrt[4]{م^{٣}}+\sqrt[4]{م^{٢}}-\sqrt[4]{ه})(\sqrt[4]{م^{٢}}+\sqrt[4]{م^{٣}})$

(٣٤) $(\sqrt[4]{د^{٣}+١}-\sqrt[4]{د^{٢}}-١)(\sqrt[4]{د^{٢}}-١)$

٣٣٠. قسمة الجذور وتنطيق المخارج. كثيرًا ما يطلب منا ان نجد القيمة التقريبية لخارج قسمة عدد على جذر أصم مثل $\sqrt[4]{٣}+\sqrt[4]{٦}$ او $\sqrt[4]{٣}+\sqrt[4]{٥}$ واول ما يتبادر الى الذهن ان نستخرج $\sqrt[4]{٦}$ وهو ٢٫٤٤٩٤..... ثم نقسم ٣ على القيمة التقريبية التي استخرجناها هذا في المثال الاول اما في المثال الثاني فاننا نستخرج $\sqrt[4]{٣}$ وهو ١٫٤١٤٢... ثم $\sqrt[4]{٥}$ وهو ٢٫٢٣٦٠٦... ثم نقسم القيمة الأولى على الثانية وهذه العمليات طويلة ومملّة ونتائجها اقل ضبطًا مما نرغب فلاجل سهولة العمل نضرب كُلًّا من الصورة والمخرج [الناتجين من وضع المنسوم والمنسوم عليه على صورة كسر] في اصغر عدد يجعل المخرج كمية جذرية [اي التي يمكن استخراج جذرها بالضبط تمامًا] فيزول الجذر الاصم وهذا يقال له تنطيق المخرج

تمرين كتابي

أجب ما استطعت شفاهًا

نطق المخرج وجد قيمة ما يأتي:

(١) $\frac{\overline{١٠}}{\overline{٥}}$ (٢) $\frac{\overline{٦}}{\overline{٣}}$ (٣) $\frac{\overline{٩}}{\overline{٤}}$ (٤) $\frac{\overline{٤}}{\overline{٢}}$ (٥) $\frac{١}{\overline{٣}}$

(٦) $\frac{٢٠}{\overline{٤}}$ (٧) $\frac{٥}{\overline{٧}}$ (٨) $\frac{٣}{\overline{ك}}$ (٩) $\frac{ب}{\overline{ى}}$ (١٠) $\frac{١}{٣\overline{٢}}$

(١١) $\frac{٢}{٧\overline{٥}}$ (١٢) $\frac{ب}{د\overline{ك}}$ (١٣) $\frac{٣}{\overline{٥}}$ (١٤) $\frac{١٥\overline{٢}}{١٢\overline{٥}}$

(١٥) $\frac{\overline{ب}}{\overline{ت}}$ (١٦) $\frac{٢\overline{ك}}{\overline{ى}}$ (١٧) $\frac{١}{\overline{ى}}$ (١٨) $\frac{ب\overline{ك}}{\overline{ت ى}}$

(١٩) $\frac{١٢\overline{٥٠}}{١٠\overline{٧٥}}$ (٢٠) $\frac{\overline{٢ د ت}^{٢}}{١٥\overline{ت د}^{٢}}$

الفصل الخامس عشر

معادلات الدرجة الثانية

القسم الاول

٣٢١. معادلة الدرجة الثانية ذات مجهول واحد. هي المعادلة التي تشتمل على مربع المجهول ولا تشتمل عليه بدرجة اعلى من الدرجة الثانية

٣٢٢. معادلة الدرجة الثانية الناقصة هي التي تشتمل على القوة الثانية للمجهول وتخلو من القوة الاولى مثل $٥ك^٢ = ٢٠$

وقد يقال لها ايضاً معادلة الدرجة الثانية المحضة

٣٢٣. معادلة الدرجة الثانية التامة هي التي تشتمل على مربع المجهول وقوته الاولى مثل $٢ك^٢ - ٧ك + ١٢ = ٠$.

٣٢٤. حلّ معادلة الدرجة الثانية الناقصة. بما ان المعادلة الناقصة تشتمل فقط على مربع المجهول فيمكن ان تعتبر كمعادلة بسيطة يقصد استخراج جذر مربع المجهول فيها ولذلك نحوّلها الى الشكل $ك^٢ = س$ ثم نستخرج الجذر الحسابي لطرفي المعادلة

مثال ١. $\frac{ك^٢ - ١٢}{٣} - \frac{ك^٢ - ٤}{٤}$ جد قيمة ك

$$٤ك^٢ - ٤٨ - ٣ك^٢ - ١٢$$
$$ك^٢ - ٣٦$$
$$ك - \pm ٦$$

كثيرًا ما يعترض الطلبة في هذا المقام انه يجب وضع العلامة المزدوجة "±" امام كل من طرفي المعادلة هكذا ± ك = ± ٦ ولكن اذا دققنا البحث وتحرينا جميع الحالات الممكنة نجد ان ذلك ليس لازمًا لانه ينتج من ± ك = ± ٦ اربع حالات وهي : + ك = + ٦ ، + ك = − ٦ ، − ك = + ٦ − ك = − ٦ وهذه الاربع الحالات تدخل في الحالتين اللتين ذكرناها قبلاً اعني ك = + ٦ ، ك = − ٦

فيكفي اذًا وضع العلامة المزدوجة امام احد الطرفين فقط عند استخراج الجذر المالي لها . والانسب وضعها امام الكمية المعلومة فقط كما فعلنا في المثال السابق

مثال ٢ . $\frac{ب}{ك^٢ - د} = \frac{د}{ك^٢ - ب}$ جد قيمة ك

$$ب ك^٢ - ب^٢ = د ك^٢ - د^٢$$
$$ب ك^٢ - د ك^٢ = ب^٢ - د^٢$$
$$ك^٢ (ب - د) = ب + د$$
$$\therefore \quad ك = \pm \sqrt{ب + د}$$

تمرين كتابي

اجب ما استطعت شفاهًا

جد قيمة المجهول في ما يأتي

(١) $ك^٢ - ٩ = ٠$ (٢) $ك^٢ - ٤٩ = ٠$ (٣) $ى^٢ - ٢٥ = ٠$

(٤) $ى^٢ - ١ = ٠$ (٥) $ى^٢ - ٦٤ = ٠$ (٦) $٥م^٢ - ٨٠ = ٠$

(٧) $ك^٢ - ٤د^٢ = ٠$ (٨) $ى^٢ - ٢٥ج^٤ = ٠$

(٩) $٣م^٢ - ٥ = م^٢ + ٣$ (١٠) $\frac{١}{٢}ل^٢ - ١ = \frac{١}{٣} - ٢ل^٢$

(١١) $\frac{١}{٣م - ١} = \frac{١}{٣م + ١}$ (١٢) $د ك^٢ + د^٣ = ٥د^٢ - ٣د ك^٢$

(١٣) $\frac{٢د}{م-د} + \frac{٥م+٢د}{٤م} + ١ = ٠$

(١٤) ما العدد الذي اذا زدت على مربعه ٩ لكان المجموع ضعفي مربع العدد الا ٢٧؟

(١٥) طول حقل ٤ اضعاف عرضه ومساحته ٢٥٦٠٠ متر مربع فكم طوله وعرضه؟

٢٣٥. حلّ معادلة الدرجة الثانية التامة. نحلّ المعادلة التامة اما بواسطة الحل الى الاضلاع او باكمال التربيع او بواسطة القانون

(١) **الحل الى اضلاع** وهذا نمثله بالمثال الآتي —:

مثال ١. حلّ $٢ك^{٢} - ٥ك - ٣ = ٠$.

$٢ك^{٢} - ٥ك - ٣ = (٢ك + ١)(ك - ٣)$

اي $(٢ك + ١)(ك - ٣) = ٠$.

∴ $ك - ٣ = ٠$ او $٢ك + ١ = ٠$.

اي $ك = ٣$ او $ك = -\frac{١}{٢}$

بما ان حاصل الضلعين صفر فاما ان يكون كلٌّ منهما صفرًا او على الاقل يكون احدهما صفرًا. وحتى يوجب الفرض الاخير يجب لنا ان نجعل كلاً منهما صفرًا لاننا لا نعلم بالتأكيد ايهما صفر فاذا كان $ك - ٣ = ٠$ كانت $ك = ٣$ واذا كان $٢ك + ١ = ٠$ كانت $ك = -\frac{١}{٢}$ (١)

---

(١) كل قيمة من قيم ك التي تجعل احد الضلعين صفرًا تجعل الحاصل صفرًا اي ان تلك القيمة تحقق المعادلة او تجعلها صحيحة

ولكن $ك - ٣ = ٠$ فقط حينما تكون $ك = ٣$

وكذلك $٢ك + ١ = ٠$ فقط حينما تكون $ك = -\frac{١}{٢}$

فاذًا ٣ و $-\frac{١}{٢}$ هي جذور المعادلة او جواباها

تمرين كتابي

اجب ما استطعت شفاهاً

حلّ المعادلات الآتية:

(١) $(م-١)(م-٢)=٠$ (٢) $(ل+٣)(ل+٥)=٠$

(٣) $(ى-٣)(ى+٤)=٠$ (٤) $ى(ى-٢)=٠$

(٥) $٣م(٧-م)=٠$ (٦) $ل^{٢}+٩ل=٠$

(٧) $٣ك^{٢}=٨ك$ (٨) $ى(ى-د)=٠$

(٩) $(ى+٣)(٢ى-١)=٠$ (١٠) $(٣م+٥)(٣م-٧)=٠$

(١١) $(٢ى-د)(ى+٣د)=٠$ (١٢) $ى^{٢}-٧ى+١٠=٠$

(١٣) $م^{٢}-٣م-٢٨=٠$ (١٤) $ل^{٢}=٢ل+٩٩$

(١٥) $ك^{٢}=ك+١٢$ (١٦) $ك^{٢}+١٢ك+٣٦=٠$

(١٧) $٣ل^{٢}-١٠ل+٣=٠$ (١٨) $٦ى^{٢}-١٣ى+٦=٠$

(١٩) $٢ى^{٢}-٧ى=٣٩$ (٢٠) $٣م(م+١)=١٥+م$

(٢١) $٢ك^{٢}-٣دك-جك=٠$ (٢٢) $ى^{٢}-\frac{١}{٤}ى+\frac{١}{٨}=٠$

(٢٣) $\frac{م+١٠}{م-٥}-\frac{١٠}{م}=\frac{١١}{٦}$

(٢٤) $\frac{٧}{ى+٥}-\frac{١}{ى-٣}=١\frac{٢}{٣}$ (٢٥) $\frac{٢ى}{ى+١}-\frac{١}{١-ى^{٢}}+\frac{١}{ى}=٠$

(٣) الحل باكمال التربيع . ذكرنا قبلاً انهُ يشترط في الكمية الثلاثية الحدود ن مربعاً كاملاً ان يكون كلٌّ من الاول والثالث مربعين تامّين متماثلين في العلامة والحد الاوسط ضعف حاصل جذريها المماثلين

وعليهِ اذا كان مسمى مربع المجهول واحداً فلكي تكون الكمية الثلاثية مربعاً كاملاً وجب ان يكون الحدّ المطلق [اي الخالي من المجهول] مساوياً لمربع نصف مسمى الحرف المجهول ذي القوة الاولى

فاذا اذا علم الحدان اللذان يشتملان على مربع المجهول وقوته الاولى [ك٢ وك مثلاً] يمكن اكمال المربع باضافة مربع نصف مسمى القوة الاولى

تمرين شفهي

اجعل ما يأتي مربعاً تاماً

(١) م٢ + ٢م + ؟ (٢) ى٢ + ٦ى (٣) ل٢ − ٤ى
(٤) ك٢ − ٢ك (٥) ك٢ + ١٢ك (٦) ى٢ − ١٦ى
(٧) م٢ + ٨م (٨) ى٢ + ٣ى (٩) ك٢ + ك
(١٠) ى٢ − ى (١١) ى٢ − ½ى (١٢) م٢ − ٥م
(١٣) ل٢ + ١٠ل (١٤) ك٢ + ⅔ك (١٥) م٢ + ⅘م
(١٦) ل٢ + ¾ل (١٧) ى٢ + ⅔ى (١٨) ك٢ − ١١/٩ك

٣٢٦ طريقة الحلّ باكمال التربيع تتوقف على كيفية ترتيب حدود المعادلة والاضافة اليها حتى يكون جانبها الايمن كمية ثلاثية كاملة التربيع والايسر حداً مطلقاً او صفراً وهذا نبسطهُ بالامثلة الآتية

مثال ١. حلّ $ك^٢+٦ك-١٦=٠$.

الحلّ: بالمقابلة $ك^٢+٦ك-١٦$

باضافة مربع $\frac{١}{٢}$ (٦) $ك^٢+٦ك+٩-١٦+٩=٢٥$

باستخراج الجذر المالي $ك+٣=\pm ٥$

وبالمقابلة $ك=٢$ او -٨

مثال ٢. حلّ $٢ك^٢+٣ك^٢-٢=٠$.

الحلّ: بالمقابلة $٢ك^٢+٣ك=٢$

بالقسمة على ٢ [مسمى ك ليصير مسماها واحداً]

$ك^٢+\frac{٣}{٢}ك=١$

باضافة مربع $\frac{١}{٢}$ ال $(\frac{٣}{٢})$ اي $(\frac{٣}{٤})^٢$

$ك^٢+\frac{٣}{٢}ك+(\frac{٣}{٤})^٢=١+\frac{٩}{١٦}=\frac{٢٥}{١٦}$

او $(ك+\frac{٣}{٤})^٢=(\frac{٥}{٤})^٢$

باستخراج الجذر المالي $ك+\frac{٣}{٤}=\pm\frac{٥}{٤}$

$\therefore ك=-\frac{٣}{٤}\pm\frac{٥}{٤}=\frac{١}{٢}$ او -٢

٢٢٧. ومما مرّ نستنتج ان الخطوات التي يجب اتباعها في حل معادلة الدرجة الثانية التامة هي:

(١) نكتب الحدود المشتملة على $ك^٢$ و $ك$ في الجانب الايمن والحد المطلق في الجانب الايسر

(٢) نجعل مسمى $ك^٢$ الوحدة الموجبة وذلك بقسمة طرفي المعادلة على مسمى $ك^٢$ ما لم يكن ذلك المسمى $+١$

(٣) نضيف الى كلّ من طرفي المعادلة مربع نصف مسمى $ك$ لجعل الجانب الايمن مربعاً تاماً

(٤) نستخرج الجذر المالي للطرفين ونضع العلامة المزدوجة "±" امام الجانب الايسر

(٥) نحل المعادلتين البسيطتين لاستخراج قيمة المجهول

والافضل ان يستحسن العمل بالتعويض عن ك بقيمتها في المعادلة الاصلية للتأكد من صحته

وطريقة الحل باكمال التربيع هي الطريقة العامة ولكن بما ان طائفة كبيرة من الامثلة تحل بطريقة حلّ الاضلاع التي هي في الغالب اسهل واكثر اختصاراً فلذلك يجب الانتباه والتبصر اذا كان بالامكان حلّ السؤال المفروض بها [بطريقة حلّ الاضلاع] اولاً قبل ان نلجأ الى حله بالطريقة العامة

تمرين كتابي

اجب ما استطعت شفاهاً

حلّ ما يأتي :

(١) $ك^٢ + ٦ك - ٧ = ٠$ (٢) $ى^٢ + ٤ى = ١٢$

(٣) $م^٢ + ١٠م = ٢٤$ (٤) $ل^٢ + ٢ل = ٨$

(٥) $ك^٢ - ٤ك = ٥$ (٦) $ى^٢ - ٨ى - ٢٠ = ٠$

(٧) $م^٢ - ٥م = ٦$ (٨) $ل^٢ + ٨ل - ١٠٥ = ٠$

(٩) $ك^٢ - ٢ك = ٨٠$ (١٠) $ى^٢ + ١١ى + ٢٤ = ٠$

(١١) $٣م^٢ + ٤م = ٧$ (١٢) $٢ل^٢ - ٧ل + ٥ = ٠$

(١٣) $٥ك^٢ - ٦ك = ٨$ (١٤) $٢ى^٢ - ٥ى = ٧$

(١٥) $٢ل^{٢}-٣ل+١=٠$ (١٦) $٣م^{٢}+٧م=-٤$

(١٧) $٣ك^{٢}+٧ك=٢٦$ (١٨) $٤ى^{٢}+١٢ى+٩=٠$

(١٩) $٣٠ل^{٢}-ل-١=٠$ (٢٠) $١٢٥م^{٢}-٤٣م=١٦$

(٢١) $٤٣ك^{٢}-١٥ك+١٥=٠$ (٢٢) $٣ى^{٢}-\frac{١}{٢}ى+\frac{٢}{٣}$

(٢٣) $\frac{١}{٢}=\frac{٧}{١}ل+ل^{٢}$ (٢٤) $\frac{٢}{٤}-ك^{٢}=٣ك$

(٢٥) $٣ى^{٢}+\frac{٢}{٣}ى-٢=٠$ (٢٦) $\frac{٥}{٢}-\frac{٢}{٣}م^{٢}-١=٠$

(٢٧) $ل=\frac{٣}{ل+٢}$ (٢٨) $\frac{٤}{م+٥}=-٣م$

(٢٩) $\frac{١+ك}{٢+ك}-\frac{١}{٦}=\frac{٣-ك}{٥-ك}$

(٣٠) $\frac{ل+٢}{ل-٤}+\frac{ل-١}{ل+٥}+١=٠$

(٣١) $\frac{١}{م+٢}-\frac{م}{م-٢}=\frac{٤}{٣}$

(٣٢) $\frac{٢ك+١}{ك-١}+ك=\frac{ك-١}{٣}$

(٣٣) $\frac{٢}{٣ك-١}=\frac{٣ك}{٢ك-٥}$ (٣٤) $\frac{٥ى+٤}{٣ى+١}=\frac{ى+٣}{٤ى+٥}$

٣٢٨ . (٢) **الحلّ بواسطة القانون .** الشكل العام لمعادلة الدرجة الثانية هي $د ك^{٢} + ب ك + س = ٠$

بحيث ان كلاً من الكميات د و ب و س يدل على اية كمية عددية. فاذا تمكنا من حلّ هذه المعادلة أصبح من السهل علينا حلّ اي معادلة اخرى من الدرجة الثانية مهما كان نوعها

الحلّ : بالمقابلة $د ك^{٢} + ب ك = -س$

بالقسمة على د $ك^{٢} + د/ب ك = -د/س$

باتمام التربيع $ك^{٢} + د/ب ك + (\frac{ب}{٢د})^{٢} = \frac{ب^{٢}}{٤د^{٢}} - \frac{س}{د}$

$= \frac{ب^{٢} - ٤ س د}{٤ د^{٢}}$

باستخراج الجذر المالي $ك + \frac{ب}{٢د} = \frac{\pm \sqrt{ب^{٢} - ٤ س د}}{٢ د}$

$\therefore ك = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤ س د}}{٢ د}$

وهذه النتيجة تستخدم كقانون عام في حلّ معادلات الدرجة الثانية وذلك بوضع قيمة كلّ من د و ب و س في القانون واستخراج قيمة المجهول [ك او ى مثلاً]

مثال ١ . حلّ $٢ ك^{٢} + ٣ ك - ٢ = ٠$.

هنا $د = ٢ . ب = ٣ . س = -٢$

وبالتعويض عن الاحرف المذكورة بقيمها في القانون العام نجد

$$ك = \frac{-٤ \pm \sqrt{(٤)^٢ - ٤ \times ٢ \times (-٢)}}{٢ \times ٢} = \frac{-٤ \pm \sqrt{٣٢}}{٤} = \frac{-٤ \pm ٥}{٤}$$

$$= ١\frac{١}{٤} \text{ او } -٢\frac{١}{٤} = \frac{١}{٢} \text{ او } -٢$$

وهي نفس النتيجة التي وجدناها باتباع طريقة الحل المذكورة في مثال ٢ ص ٢٢٦

تمرين كتابي

حلّ ما يأتي بواسطة القانون العام وامتحن العمل:

(١) $ل^٢ + ٥ل = ٦$ (٢) $٤م^٢ - م = ٣$ (٣) $٦ك^٢ + ٥ك = ٤$

(٤) $٨ى^٢ - ٢ى = ٣$ (٥) $٤ل^٢ + ٤ل = ٣٥$

(٦) $١٦م^٢ - ٤٠م + ٩ = ٠$ (٧) $ك(ك+٢) = ١٥$

(٨) $ى^٢ + ٧ى = ١٨$ (٩) $\frac{١٢}{ل^٢ - ٩} = ١ - \frac{٢}{ل+٣}$

(١٠) $\frac{م-١}{١٢} + \frac{٢}{م-١} = \frac{٥}{٦}$ (١١) $١٢ك^٢ - ١٧ك + ٦ = ٠$

(١٢) $١٦ك^٢ - ٢٧ك + ٤ = ٠$ (١٣) $\frac{٩ى}{٢٥} + \frac{٢٥}{٩ى} = ٢$

(١٤) $\frac{٢+ل}{٨+٣ل} = \frac{ل-٥}{٢+٥ل}$ (١٥) $\frac{ى+٢}{ى-١} - \frac{٤-ى}{٢ى} = -٢\frac{١}{٢}$

(١٦) $\frac{٧}{ك+٣} - \frac{١}{ك-٥} = ١\frac{٢}{٣}$

٣٢٩. معادلات الدرجة الثانية الحرفية تحل بالطرق التي استخدمناها لحل معادلات الدرجة الثانية العددية

مثال ١. حلّ : $ك^٢ - ٣دك + ٢د^٢ = ٠$

$(ك - ٢د)(ك - د) = ٠$

$\therefore ك = د$ او $٢د$

هذا حلها بالاضلاع وهاك حلها باكمال التربيع

$ك^٢ - ٣دك = -٢د^٢$

$ك^٢ - ٣دك + (\frac{٣د}{٢})^٢ = \frac{٩د^٢}{٤} - ٢د^٢ = \frac{د^٢}{٤}$

$ك - \frac{٣د}{٢} = \pm \frac{د}{٢}$

$\therefore ك = ٢د$ او $د$

تمرين كتابي

حلّ المعادلات الآتية :

(١) $ل^٢ + ٤دل = ١٢د^٢$ (٢) $م^٢ + ٤ب م = ٢١ب^٢$

(٣) $ك^٢ + ٣مك - ١٠م^٢ = ٠$ (٤) $ى^٢ - ٥دى = -٦د^٢$

(٥) $ل^{٢} - ٧ب ل + ١٢ ب^{٢} = ٠$ (٦) $م^{٢} = ٦ ب^{٢} د^{٢} - ٥ ب^{٢} د م$

(٧) $٦ ك^{٢} = ١٢ ب^{٢} + ب ك$ (٨) $٤ ى^{٢} + ٤٤ د س ى = ١٥ س^{٢} د^{٢}$

(٩) $ل^{٢} - ٦ د ك = ٤ د ك - ١٨ د^{٢}$ (١٠) $ك + د = \frac{٢ د ك + ٦ د^{٢}}{ك}$

(١١) $م - ٧ د = \frac{١٥ د^{٢} - ٥ د م}{م}$ (١٢) $٣ د^{٢} ل^{٢} + د ل = ٢$

(١٣) $٧ د^{٢} م^{٢} - ١٠ د ر م + ٣ ر^{٢} = ٠$ (١٤) $ى^{٢} + د^{٥/٦}_{هـ ى} = د^{٦/٥}$

(١٥) $ى^{٢} + \frac{ب ى}{د} = \frac{٣ ب^{٢}}{٤ د^{٢}}$ (١٦) $د = س ك + \frac{١}{٢} ج ك^{٢}$

تمرين كتابي — مسائل

مثال ١. اقسم ٨٠ الى قسمين بحيث يكون مجموع مكعوبهما ١/١٥

لتكن ك احد القسمين فاذا ٨٠ − ك القسم الآخر

$$\frac{١}{ك} + \frac{١}{٨٠ - ك} = \frac{١}{١٥}$$

$$ك (٨٠ - ك) = ١٥ \times ٨٠ = ١٢٠٠$$

$$ك^{٢} - ٨٠ ك + ١٢٠٠ = ٠$$

$$(ك - ٢٠)(ك - ٦٠) = ٠$$

∴ ك = ٢٠ او ٦٠ وكلاهما ينطبقان على شروط المسألة لانه اذا كانت ٢٠ احد القسمين فالقسم الآخر يكون ٨٠ − ٢٠ = ٦٠ وكذلك اذا كانت ٦٠ احد القسمين كان الآخر ٨٠ − ٦٠ = ٢٠

مثال ٢. باع رجل حصاناً بمبلغ ٢٤ ليرة مصرية فكانت خسارته في المئة قدر عدد الليرات التي دفعها ثمناً للحصان فبكم اشترى الحصان ؟

لتكن ى عدد الليرات التي اشترى بها الحصان فتكون خسارته ى — ٢٤ . وهذه تكون ى ٪ من ى ليرة

$$\therefore \quad ى - ٢٤ = \frac{ى}{١٠٠} \times ى = \frac{ى^٢}{١٠٠}$$

$$\text{اي} \quad ى^٢ - ١٠٠ ى + ٢٤٠٠ = ٠$$

$$(ى - ٦٠)(ى - ٤٠) = ٠$$

∴ ى = ٤٠ او ٦٠ وكلاهما معقولان وينطبقان على شروط المسألة . لانه اذا كان ثمن الحصان ٤٠ ليرة كانت الخسارة ١٦ ليرة وهي ٤٠ ٪ من ٤٠ ليرة

واذا كان الثمن ٦٠ ليرة كانت الخسارة ٢٤ ليرة وهي ٦٠ ٪ من ٦٠ ليرة

فنرى من المثالين السابقين ان كلاً من الجذرين ينطبق على شروط المسألة ولكن يحدث غالبًا ان المعادلة الجبرية التي تتكون من منطوق المسألة يكون لها جذر لا ينطبق على شروطها (شروط المسألة) وبكلام آخر غير معقول وقد نستطيع احيانًا تعليل تلك الجذور او وجدان معنىً لها بتغيير عبارة المسألة والفروض المشتملة عليها تغييرًا مناسبًا

مثال ٣ سار قطار ٦٠ ميلاً بسرعة منتظمة . ولو زادت السرعة ١٠ اميال في الساعة لنقص الوقت الذي استغرقه نصف ساعة . فكم كانت سرعة القطار ؟

لتكن سرعة القطار م ميلاً في الساعة فيكون الوقت الذي استغرقه في قطع المسافة ٦٠ م/ ساعة

وبموجب الفرض الآخر اذا زادت السرعة ١٠ اميال في الساعة يكون الوقت $\frac{٦٠}{م+١٠}$ ساعة

$$\therefore \quad \frac{٦٠}{م+١٠} = \frac{٦٠}{م} - ١/٢ \quad \ldots\ldots (١)$$

$م^2 + ١٠م - ١٢٠٠ = ٠$

$(م + ٤٠)(م - ٣٠) = ٠$

$\therefore م = ٣٠$ او -٤٠

فالسرعة ٣٠ ميلاً في الساعة لان قيمة م السلبية غير معقولة ولذلك نرفضها

ملاحظة: قيمة $م = -٤٠$ يمكن جعلها تنطبق على شروط مسألة جديدة بتغيير عبارة المسألة الاولى والفروض المشتملة عليها

وبما ان $م = -٤٠$ تجعل المعادلة (١) صحيحة فاذا $م = +٤٠$ تجعل المعادلة

$$\frac{٦٠}{-م + ١٠} - \frac{٦٠}{-م} = \frac{١}{٢} \quad \ldots\ldots (٣)$$

صحيحة. وهذه المعادلة تنتج من المعادلة (١) بوضع $-م$ بدل م وبتغيير جميع العلامات في المعادلة (٣)

بتنج $\frac{٦٠}{م - ١٠} - \frac{٦٠}{م} + \frac{١}{٢}$

وهذه المعادلة تصح بالمجذرين -٣٠ و٤٠ [اي عكس المعادلة (١)] وهي ناتجة من السؤال الآتي:

سار قطار ٦٠ ميلاً بسرعة منتظمة ولو نقصت السرعة ١٠ اميال في الساعة لزاد الوقت الذي استغرقه في قطع المسافة $\frac{١}{٢}$ ساعة فكم كانت سرعة القطار؟

(٤) ما العدد الذي اذا طُرح ٤ اضعافه من مربعه كان الباقي ٤٥؟

(٥) ما العدد الذي اذا أُضيف اليه مربعه كان المجموع ١٢؟

(٦) اذا ضعفت ٣ امثال عدد الى مربعه كان المجموع ٤٠ فما هو العدد؟

(٧) اذا ضربت عددين متتالين كان حاصلها ٧٢ فما العددان؟

(٨) حاصل ضرب عددين متتالين ٨١٢ فما العددان؟

(٩) حاصل ضرب عددين مفردين متتاليين ٤٨٣ فما العددان ؟

(١٠) حاصل ضرب عددين مزدوجين متتاليين ٣٢٠٨ فما العددان ؟

(١١) طول حقل مستطيل الشكل ٤ امثال عرضه ومساحته ٧٥٠٠ ذراع مربع فكم يكون طول اضلاعه ؟

(١٢) مجموع مربعي عددين متتاليين ١٨٦١ فما العددان ؟

(١٣) مساحة حقل مستطيل الشكل مهل مربع وطوله يزيد ٤٠٠ قدم عن عرضه فكم يكون طوله وعرضه ؟

(١٤) مجموع مربعات ثلاثة اعداد متتالية ١٤٢٥ فما هي الاعداد ؟

(١٥) مساحة حقلين مربعين ١٠٠٠٠ مترًا مربعًا وضلع الاكبر يزيد ٥٠ مترًا عن ضلع الاصغر فما طول ضلع كلٍّ منهما ؟

(١٦) قطر مستطيل ٥٠ مترًا واحد الضلعين يزيد ٢٠ مترًا عن الآخر فكم طول كل منهما ؟

(١٧) ضلع مثلث مستقيم الزاوية ٪ الآخر والوتر ٢٨ ذراعاً فما طول كلٍّ من الضلعين ؟

(١٨) ما طول ضلع المربع اذا كان محيطه يساوي عدد مساحته ؟

(١٩) الفرق بين عددين ٢ ومجموع ضعفي مربع الاكبر مع ٢ امثال العدد الاصغر ٥٦ فما العددان ؟

(٢٠) طول حقل ٥٠ مترًا وعرضه ٣٤ وهو محاط بطريق منتظم مساحته ٥٤٠ مترًا مربعًا فما عرض الطريق ؟

(٢١) طول حقل ٨٠ ذراعاً وعرضه ٦٠ وهو محاط بطريق منتظم مساحته ٪ مساحة الحقل فكم عرضه ؟

(٢٣) الفرق بين مكعبي عددين متتاليين ٢١٧ فما العددان ؟

(٢٤) سارة سيارة الى بلدة تبعد ١٢٥ ميلاً ورجعت بـ ١١ ساعة وكانت سرعتها في الذهاب اكثر من سرعتها في الاياب بثلاثة اميال فكم كانت سرعتها ذهاباً واياباً ؟

(٢٤) سار قطاران ٣٨٤ ميلاً وكانت سرعة اسرعهما تزيد ٤ اميال في الساعة عن سرعة الآخر واقتضى له ساعة اقل منه (من البطيء) فكم كانت سرعة كل منهما ؟

(٢٥) الفرق بين ضلعي مكعبين ٣ قراريط وبين حجميهما ٥١٢ قيراطاً مكعباً فكم طول كلٍّ منهما ؟

(٢٦) انبوبان يملآن حوضاً في ٤٥ دقيقة واحدهما يقتضي له ليملأه ١٠ دقائق اكثر من الآخر ففي كم من الوقت يملؤه كلٌّ منهما ؟

(٢٧) لو ارتفع سعر البيض ٣٥ غرشاً في الدزينة لاشتريت بمبلغ ٤٠٠ غرش ٢٤ بيضة أقل مما اشتريت اولاً فكم كان الثمن اولاً ؟

(٢٨) الفرق بين عددين ٣٠ ومجموع مقلوبيهما ٢٤٠/٧ فما العددان ؟

(٢٩) سارة باخرة ٢٣٤٠ ميلاً ولو انها زادت سرعتها ٣ اميال في الساعة لنقص الوقت الذي استغرقته ١ ½ يوم فكم كانت سرعتها ؟

(٣٠) وزّع محسن ٢٤٠٠ غرش على عدد من الاولاد بالسوية ولو كان عددهم اقل بعشرين ولداً لاصاب الواحد ١٠ غروش اكثر مما نال قبلاً فكم كان عددهم ؟

القسم الثاني

٣٣٠. معادلات بصورة الدرجة الثانية. كل معادلة فيها قوتان للكمية المجهولة ودليل احداهنّ ضعف دليل الثانية هي بصورة معادلة الدرجة الثانية وتحلّ بذات الطرق التي تحلّ بها معادلة الدرجة الثانية

مثال ١. حلّ: $ك^{٤} - ٥ك^{٢} - ٤$

باكمال التربيع $ك^{٤} - ٥ك^{٢} + (\frac{٥}{٢})^{٢} - \frac{٤}{١}$

فاذًا $ك^{٢} - \frac{٥}{٢} = \pm \frac{٣}{٢}$

اي $ك^{٢} = ٤$ او ١

$\therefore ك = \pm ٢$ او ± ١

وهذا السؤال يحل ايضًا بواسطة حلّ الاضلاع وبالقانون

ملاحظة: جذور المعادلة بقدر عدد اعلى قوة فيها

مثال ٢. حلّ $٢ى^{٢} - ى + \frac{٦}{٢ى^{٢} - ى} = ٧$

نضع بدل $٢ى^{٢} - ى$ الحرف م اي نعاملها معاملة كمية واحدة

فينتج $م + \frac{٦}{م} = ٧$

اي ان $م^{٢} - ٧م + ٦ = ٠$

$(م - ٦)(م - ١) = ٠$

$\therefore م = ٦$ او ١

$\therefore ٢ى^{٢} - ى = ٦$ او ١

فلنا منها معادلتان من الدرجة الثانية ونحلها نجد ان

$ى = ٢$ و $-\frac{٣}{٢}$ او ١ و $-\frac{١}{٢}$

تمرين كتابي

حلّ المعادلات الآتية :

(١) $ى^{٤} - ١٠ ى^{٢} + ٩ = ٠$ (٢) $ل^{٤} - ١٧ ل^{٢} + ١٦ = ٠$

(٣) $م^{٤} + ٣٦ = ١٣ م^{٢}$ (٤) $٤ (ك^{٤} + د^{٤}) = ١٧ د^{٢} ك^{٢}$

(٥) $٤ ى^{٤} - ١٣ ى^{٢} + ٩ = ٠$ (٦) $٤ ل^{٤} - ٢٩ ل^{٢} + ٢٥ = ٠$

(٧) $م^{٦} + ٧ م^{٣} = ٨$ (٨) $ك^{٦} - ٩ ك^{٣} + ٨ = ٠$

(٩) $ى^{٤} - ١١ ى^{٢} + ١٨ = ٠$ (١٠) $ل^{٦} - ١٩ ل^{٣} = ٢١٦$

(١١) $م^{٦} + ٢٦ د^{٣} م^{٣} = ٢٧ د^{٦}$ (١٢) $٤ ك^{٤} - ٨ ك^{٢} + ١ = ٠$

(١٣) $(ى^{٢} + ى)^{٢} + ٧ (ى^{٢} + ى) = ١٨$

(١٤) $(م^{٢} + ٢)^{٢} - ٢٩ (م^{٢} + ٢) = - ١٩٨$

(١٥) $(م^{٢} - ٢م)^{٢} + \frac{٤٠}{م (م - ٢)} = ١٤$

(١٦) $م (م - ٢) = \frac{٨}{م^{٢} - ٢م} + ٧$

٣٣١. طريقة حلّ المعادلات بواسطة حلّ الاضلاع قد نستخدم ايضاً في حلّ المعادلات التي درجتها أعلى من الثانية

مثال ١. اذا كانت $(ك + ١) (ك - ٢) (ك + ٣) = ٠$ امكن تحقيق هذه المعادلة بكل من القيم التي يمكن ان تحقق بها المعادلات الثلاثة الآتية :

$ك + ١ = ٠$; $ك - ٢ = ٠$, $ك + ٣ = ٠$

وعليه تكون جذور المعادلة -١ ; ٢ ; -٣

مثال ٢. حلّ: $٢ى^{٣} - ٥ى^{٢} - ٢ى - ٥$

ضع المعادلة بالشكل الآتي: $٢ى^{٣} - ٥ى^{٢} - ٢ى + ٥ = ٠$

اي $ى^{٢}(٢ى - ٥) - (٢ى - ٥) = ٠$

او $(ى^{٢} - ١)(٢ى - ٥) = ٠$

او $(ى + ١)(ى - ١)(٢ى - ٥) = ٠$

$\therefore ى = -١ \; ; \; ١ \; ; \; ٢\frac{١}{٢}$

٣٣٣. اذا عرفنا احد جذور معادلة او امكننا الحصول عليه بالاستقراء او التجربة فاننا نتخلص من ضلع من الدرجة الاولى بقسمة طرفي المعادلة على كمية مركبة من الكمية المجهولة الاّ الجذر المعلوم وبذلك نحصل على معادلة درجتها اقل من درجة المعادلة الاصلية

مثال ١. حلّ $ك^{٣} - ٤ك^{٢} - ٥ك + ٢٤ = ٠$

نجد بالاستقراء انه لو وضعنا ٣ بدل ك لصحت المعادلة. وعليه تكون ٣ احد جذور المعادلة ويكون $ك - ٣$ ضلع المعادلة المقابل لذلك الجذر وحينئذٍ يمكن كتابة المعادلة هكذا:

$ك^{٣} - ٣ك^{٢} - ك^{٢} + ٣ك - ٨ك + ٢٤ = ٠$

اي $ك^{٢}(ك - ٣) - ك(ك - ٣) - ٨(ك - ٣) = ٠$

$(ك - ٣)(ك^{٢} - ك - ٨) = ٠$

ويحذف الضلع $ك - ٣ = ٠$ يبقى $ك^{٢} - ك - ٨ = ٠$

فاذاً $ك = ٣ \; , \; \frac{١ + \sqrt{٣٣}}{٢} \; , \; \frac{١ - \sqrt{٣٣}}{٢}$

تمرين كتابي

حلّ ما يأتي وانتبه ان الضلع المطلوب هو احد اضلاع الحد المطلق اذا كان مسمى اعلى قوة واحداً

(١) $ل^٢ + ل^٢ - ل - ١ = ٠$ (٢) $م^٢ - ٢م^٢ - م + ٢ = ٠$

(٣) $ك^٢ - ٩ك = ك^٢ - ٩$ (٤) $ى^٢ + ٧ى^٢ + ٧ى - ١٥ = ٠$

(٥) $ل^٢ - ٤ل - ٢ = ٠$ (٦) $م^٤ + ٢م = ٢م^٢$

(٧) $ك^٢ - ١٩ك + ٢٠ = ٠$ (٨) $ى^٢ - ٢ى^٢ - ٥ى + ٦ = ٠$

(٩) $ل^٢ - ٧ل + ٦ = ٠$ (١٠) $٢م^٢ + ١٢م^٢ - ٢٦ = ٠$

حلّ ما يأتي مع معرفة جذر كلٍ منها:

(١١) $ى^٢ + ٧٠ = ٢٩ى$ [ى = ٥]

(١٢) $ل^٢ - ٢٧ل = ٨٤$ [ل = – ٣]

(١٣) $م^٢ - ١٢م - ١٦ = ٠$ [م = ٤]

(١٤) $ك^٤ - ٨ك^٢ + ٤٠ك = ٠$ [ك = – ٣]

المعادلات الآتية التي من الدرجة الثانية او اكثر

٣٣٣. اذا ارتبط مجهولان بمعادلتين تكون واحدة منها او كلتاهما اعلى درجة من الدرجة الاولى فليس لحلها قواعد ثابتة عامة تتبع في سائر الاحوال. ولكننا نوجه الذهن الى بعض الطرق التي نستخدمها لحلّ الصور والاشكال الخاصة التي نحتاج اليها كثيراً في الاعمال الرياضية

اذا كانت احدى المعادلتين من الدرجة الاولى والاخرى من الدرجة الثانية فانهما تحلان دائمًا بطريقة التعويض

مثال ١. حلّ ٢ ك − ٣ ى = ٢ .... (١)

ك٢ − ٢ ك ى = − ٧ .... (٢)

لنا من (١) $ك = \frac{٣ى + ٢}{٢}$

ضع قيمة ك هذه في (٢)

$$(\frac{٣ى + ٢}{٢})^{٢} - ٢ (\frac{٣ى + ٢}{٢}) ى = - ٧$$

وبالبسط $- ٣ى^{٢} + ٤ى + ٣٢ = ٠$

اي $٣ى^{٢} - ٤ى - ٣٢ = ٠$

فاذًا $\left\{\begin{array}{l} ى = ٤ ، - ٨/٣ \\ ك = ٧ ، - ٣ \end{array}\right.$ وهو الجواب

تمرين كتابي

حلّ وامتحن ما يأتي :

(١) ٢ ك٢ + ى = ٢٣ (٢) ك + ى٢ = ١٩

ك + ى = ٥ ٣ ك + ى = ١٣

(٣) ك − ٢ ى = ٣ (٤) ٢ ك٢ + ك ى = ٣

ك٢ + ٤ ى٢ = ١٧ ٣ ك + ى = ٣

(٥) $ك^٢ - ى = ١$ (٦) $ك^٢ + ٥ك ى = ١٤$

$ى - ك = ١$ $ك + ٢ى = ٤$

(٧) $ك^٢ - ٤ى^٢ = ١$ (٨) $٢ك + ٥ى = ١$

$ك + ٢ى = ٤$ $٢ك^٢ + ٤ك ى = ٩$

(٩) $ك^٢ + ٥ك ى = ٧٦$ (١٠) $٥ك^٢ + ى^٢ = ٢٠$

$ك - ى = ١$ $ك + ٢ى = ١١$

٣٣٤. يوجد كثير من المعادلات التي تقع تحت بند ٣٣٣ والتي يمكن حلها باسهل الطرق واخصرها وهذا نبسطة بالامثلة الآتية

مثال ١. $ك + ى = ٩$ ... (١)

$ك ى = ٢٠$ ... (٢)

ربع (١) $ك^٢ + ٢ك ى + ى^٢ = ٨١$

من (٢) $٤ك ى = ٨٠$

بالطرح $ك^٢ - ٢ك ى + ى^٢ = ١$

$\therefore$ $ك - ى = \pm ١$ ... (٣)

وبربط (١) مع (٣) تنتج معادلتان بسيطتان

$$\left.\begin{matrix} ك + ى = ٩ \\ ك - ى = ١ \end{matrix}\right\} \text{ و } \left.\begin{matrix} ك + ى = ٩ \\ ك - ى = -١ \end{matrix}\right\}$$

وبالجمع والطرح والقسمة على ٢ ينتج

$$\left.\begin{matrix} ك = ٥ \\ ى = ٤ \end{matrix}\right\} \text{ او } \left.\begin{matrix} ك = ٤ \\ ى = ٥ \end{matrix}\right\}$$

مثال ٢. ك − ى = ٥ ... (١)

ك ى = ٢٤ ... (٢)

ربع (١) ك٢ − ٢ ك ى + ى٢ = ٢٥

من (٣) ٤ ك ى = ٩٦

بالجمع ك٢ + ٢ ك ى + ى٢ = ١٢١

∴ ك + ى = ± ١١ ... (٣)

وبربط (١) مع (٣) ننتج معادلتان بسيطتان

$$\begin{cases} ك + ى = ١١ \\ ك - ى = ٥ \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} ك + ى = -١١ \\ ك - ى = ٥ \end{cases}$$

وبالجمع والطرح والقسمة على ٢ ينتج

$$\begin{cases} ك = ٨ \\ ى = ٣ \end{cases} \quad \text{او} \quad \begin{cases} ك = -٨ \\ ى = -٣ \end{cases}$$

والاسلوب الذي جربنا عليه في حل المثالين السابقين مهم جدًا وهو يرمي الى استخراج قيمة ك+ى و ك − ى وحل بعض المعادلات يكون ممكنًا اذا استطعنا ان نحصل على حاصل ضرب المجهولين ومجموعهما او الفرق بينهما

مثال ٣. ك٢ + ى٢ = ٣٤ ... (١)

ك ى = ١٥ ... (٢)

اضرب (٢) في ٢ ثم اجمع واطرح فينتج

ك٢ + ٢ ك ى + ى٢ = ٦٤ و ك٢ − ٢ ك ى + ى٢ = ٤

∴ ك + ى = ± ٨ و ك − ى = ± ٢

وهذه تنتج ٤ معادلات آنية بسيطة

$$\left.\begin{matrix} ك+ى=٨ \\ ك-ى=٢ \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} ك+ى=٨ \\ ك-ى=-٢ \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} ك+ى=-٨ \\ ك-ى=٢ \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} ك+ى=-٨ \\ ك-ى=-٢ \end{matrix}\right\}$$

وبالجمع والطرح والقسمة على ٢ ينتج

$$\left.\begin{matrix} ك=٥ \\ ى=٣ \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} ك=٣ \\ ى=٥ \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} ك=-٣ \\ ى=-٥ \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} ك=-٥ \\ ى=-٣ \end{matrix}\right\}$$

مثال ٤. $ك^٢+ى^٢=٣٤$ ... (١)

$ك+ى=٨$ ... (٢)

اطرح (١) من مربع (٢) $٢ك ى=٣٠$ ... (٣)

اطرح (٣) من (١) $ك^٢-٢ك ى+ى^٢=٤$

$\therefore$ $ك-ى=\pm٢$ ... (٤)

وبربط (٤) و(٢) ينتج

$$\left.\begin{matrix} ك=٥ \\ ى=٣ \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} ك=٣ \\ ى=٥ \end{matrix}\right\}$$

تمرين كتابي

حلّ ما يأتي:

(١) $ك+ى=١١$ (٢) $ك+ى=١٤$ (٣) $ك-ى=٢$

$ك ى=٣٠$ $ك ى=٤٥$ $ك ى=٣٥$

(٤) $ك-ى=٥$ (٥) $ك-ى=٢٢$ (٦) $ك+٢ى=١٢$

$ك ى=١٢٦$ $ك ى=٢٧٤$ $ك ى=١٢$

(٧) ٢ك − ى = ١١ (٨) ٤ك − ى = ٢٤ (٩) ك + ٥ى = ١٩
ك ى = ٢١ ك ى = − ٢٠ ك ى = ١٨

(١٠) ك٢ + ى٢ = ٧٤ (١١) ك٢ + ى٢ = ٨٩ (١٢) ك ى = ٧٢٠
ك ى = ٣٥ ك ى = ٤٠ ك٢ + ى٢ = ١٤٥

(١٣) ك٢ + ى٢ = ١٧٠ (١٤) ك٢ + ٤ى٢ = ٥٢ (١٥) ك + ى = ١٥
ك ى = ١٣ ك ى = ١٢ ك٢ + ى٢ = ١٢٥

(١٦) ك + ى = ١٦ (١٧) ك٢ + ى٢ = ١٠٦ (١٨) ك − ى = ٦
ك٢ + ى٢ = ١٧٨ ك − ى = ٤ ك٢ + ى٢ = ١٨٠

(١٩) ك + ى = ٢٧ (٢٠) ك − ى = ١٣ (٢١) ك + ى = ١١
ك٢ + ى٢ = ٣٦٩ ك٢ + ى٢ = ٢٢٩ ك٢ + ك ى + ى٢ = ٩١

(٢٢) ك٢ − ك ى + ى٢ = ٥٧ (٢٣) ك٢ − ك ى + ى٢ = ٧٥
ك − ى = − ١ ك + ى = ١٥

(٢٤) ك − ى = ٩ (٢٥) ك + ى = ٧
ك٢ − ٣ ك ى + ى٢ = ٣٩ ك½ + ى½ = ٧/١٢

(٢٦) ك ى = ٣٥
ك½ + ى½ = ١٢/٣٥

٣٣٥. يمكن ان نحل بعض المعادلات التي من درجة اعلى من الثانية بالاساليب التي بسطناها قبلاً

مثال ١. ك٢ + ى٢ = ١٥٣ ....(١)
ك + ى = ٨ ....(٢)

اقسم (١) على (٢) $ك^{٢} - ك ى + ى^{٢} = ١٩$ .... (٣)

ربع (٢) واطرح واقسم على ٣ $ك ى = ١٥$ .... (٤)

اطرح (٤) من (٣) واستخرج الجذر المالي $ك - ى = \pm ٢$

وبربط هذه النتيجة مع (٢)

$$\begin{cases} ك = ٥ \\ ى = ٣ \end{cases} \qquad \begin{cases} ك = ٣ \\ ى = ٥ \end{cases}$$

مثال ٢. $ك^{٤} + ك^{٢} ى^{٢} + ى^{٤} = ١٤٤$ .... (١)

$ك^{٢} + ك ى + ى^{٢} = ١٩$ .... (٢)

اقسم (١) على (٢) $ك^{٢} - ك ى + ى^{٢} = ٧$ .... (٣)

بالجمع والطرح بين (٢) و (٣) $ك^{٢} + ى^{٢} = ١٣$ و $ك ى = ٦$

ويحل هاتين المعادلتين

$$\begin{cases} ك = ٣ \\ ى = ٢ \end{cases} \quad \begin{cases} ك = ٢ \\ ى = ٣ \end{cases} \quad \begin{cases} ك = -٣ \\ ى = -٢ \end{cases} \quad \begin{cases} ك = -٢ \\ ى = -٣ \end{cases}$$

مثال ٣. $\frac{١}{ك} + \frac{١}{ى} = \frac{٨}{١٥}$ .... (١)

$\frac{١}{ك^{٢}} + \frac{١}{ى^{٢}} = \frac{٣٤}{٢٢٥}$ .... (٢)

ربع (١) $\frac{١}{ك^{٢}} + \frac{٢}{ك ى} + \frac{١}{ى^{٢}} = \frac{٦٤}{٢٢٥}$ .... (٣)

$$(٣)-(٢) \qquad \frac{٢}{ك ى} = \frac{٣٠}{٢٢٥} \ldots (٤)$$

اطرح (٤) من (٣) واستخرج الجذر المالي $\frac{١}{ك} - \frac{١}{ى} = \pm\frac{٢}{١٥}$

وبربط هاتين النتيجتين مع (١)

$$\left.\begin{matrix} ك^{\frac{١}{٢}} - ٣^{\frac{١}{٢}} \\ ى^{\frac{١}{٢}} - ٥^{\frac{١}{٢}} \end{matrix}\right\} \text{ او } \left.\begin{matrix} ك^{\frac{١}{٢}} - ٥^{\frac{١}{٢}} \\ ى^{\frac{١}{٢}} - ٣^{\frac{١}{٢}} \end{matrix}\right\}$$

$$\therefore \left.\begin{matrix} ك - ٢ \\ ى - ٥ \end{matrix}\right\} \text{ او } \left.\begin{matrix} ك - ٥ \\ ى - ٢ \end{matrix}\right\}$$

٢٣٦. يمكن استعمال الطريقة الآتية في جميع الاحوال التي تكون فيها المعادلتان من درجة واحدة ومتشابهتين [متجانستين] اي متحدة حدودها في الدرجة كما ترى في المثال الآتي

مثال ١ $٧ى^{٢} + ١٥ ك ى - ٦٨ = ٠$ ... (١)

$ك^{٢} + ٢ ك ى + ٢ى^{٢} - ١٧ = ٠$ ... (٢)

نضع م ى بدل ك في كلٍّ من المعادلتين فيحدث لنا

$ى^{٢}(٧ + ١٥ م) - ٦٨ = ٠$ ... (٣)

$ى^{٢}(م^{٢} + ٢ م + ٢) - ١٧ = ٠$ ... (٤)

وبالقسمة $\frac{م^{٢} + ٢ م + ٢}{٧ + ١٥ م} = \frac{١٧}{٦٨} = \frac{١}{٤}$

$\therefore \quad ٤م^{٢} + ٨م + ٨ = ٧ + ١٥ م$

$\therefore \quad ٤م^{٢} + ٢٣ م + ١٥ = ٠$

اي $(٤م + ٣)(م + ٥) = ٠$

$\therefore \quad م = -\frac{٣}{٤}$ او -٥

وك = م ى = ٤/٣ ى او = ٥ى

فاذا عوضنا عن ك بـ ٥ ى في (١) تج

٧ ى٢ – ٧٥ ى٢ = – ٦٨ ومنها ى = ± ١

∴ ك = – ٥ ى = ∓ ٥

فاذا عوّضنا عن ك بـ – ٤/٣ ى في (١) تج

٧ ى٢ – ٤٥/٩ ى٢ = – ٦٨ ومنها ى = ± ٤

∴ ك = – ٤/٣ ى = ∓ ٣

طريقة ثانية لحلّ مثال ١.

(١) ÷ (٢) $\frac{٧ى^٢ + ١٥ ك ى}{ك^٢ + ٣ ك ى + ٢ ى^٢} = \frac{٦٨}{١٧} = ٤$

وبالبسط والمقابلة ١٥ ى٢ + ٢٢ ك ى + ٤ ك٢ = ٠

او (٥ ى + ك) (٣ ى + ٤ ك) = ٠

∴ ى = – ١/٥ ك او ى = – ٤/٣ ك

واذا وضعنا – ١/٥ ك بدل ى في (١) تج ك = ± ٥

∴ ى = ∓ ١

واذا وضعنا – ٤/٣ ك بدل ى في (١) تج ك = ± ٣

∴ ى = ∓ ٤

تمرين كتابي

حلّ ما يأتي:

(١) ك + ى = ٥ (٢) ك + ى = ١١ (٣) ك – ى = ١

ك٢ + ى٢ = ٢٥ ك٢ + ى٢ = ٢٤١ ك٢ – ى٢ = ١٩

(٤) ك – ى = ٢ (٥) ك + ى = ٢٠ (٦) ى – ك = ٢

ك٢ – ى٢ = ٢١٨ ك٢ + ى٢ = ٢٢٤٠ ى٢ – ك٢ = ١١٧

(٧) $ك - ٣ى = ١$ (٨) $ك + ٣ى = ١٠$

$ك^{٢} - ٨ى^{٢} = ١٢٧$ $ك^{٢} + ٢٧ى^{٢} = ٢٨٠$

(٩) $ل^{٤} + ل^{٢}م^{٢} + ى^{٤} = ٢١$ (١٠) $ل^{٤} + ل^{٢}م^{٢} + م^{٤} = ٧٤١$

$ل^{٢} + ل م + م^{٢} = ٧$ $ل^{٢} - ل م + م^{٢} = ١٩$

(١١) $ل^{٤} + ل^{٢}م^{٢} + م^{٤} = ٢١٢٨$ (١٢) $ل^{٤} + ل^{٢}م^{٢} + م^{٤} = ٩٢١١$

$ل^{٢} + ل م + م^{٢} = ٧٦$ $ل^{٢} - ل م + م^{٢} = ٦١$

(١٣) $ك^{\frac{١}{٢}} + ى^{\frac{١}{٢}} = ٥$ (١٤) $ك^{\frac{١}{٢}} + ى^{\frac{١}{٢}} = ١٧$

$ك^{\frac{١}{٢}} + ى^{\frac{١}{٢}} = ١٢$ $ك^{\frac{١}{٢}} - ى^{\frac{١}{٢}} = ٣$

(١٥) $ك^{\frac{١}{٢}} + ى^{\frac{١}{٢}} = ٤٨١$ (١٦) $ك^{\frac{١}{٢}} + ى^{\frac{١}{٢}} = ٦١$

$ك^{\frac{١}{٢}} + ى^{\frac{١}{٢}} = ٢٩$ $ك ى = ٢٠$

(١٧) $ل^{٢} + ل م + م^{٢} = ٢٧$ (١٨) $ل^{٢} + م^{٢} = ٢٥١$

$ل^{٢} - م^{٢} = ٢٧$ $ل^{٢} - ل م + م^{٢} = ٢٩$

(١٩) $ك^{٢} - ٣ك ى = ٢٤$ (٢٠) $ك^{٢} - ٩ى^{٢} = ٦٤$

$ك ى - ٣ى^{٢} = ٤$ $ك ى + ٣ى^{٢} = ٢٢$

(٢١) $٣ك^{٢} - ٥ى^{٢} = ٧$ (٢٢) $٤ك^{٢} + ك ى = ٧$

$٣ك ى - ٤ى^{٢} = ٢$ $٣ك ى + ى^{٢} = ١٨$

(٢٣) $٨ك ى - ١٣ى^{٢} = ٣$ (٢٤) $ك^{٢} + ٣ك ى + ١٠ى^{٢} = ١٤٥$

$١٣ك^{٢} - ٢١ك ى = ١٠$ $ك ى + ى^{٢} = ٢٤$

٢٣٧. ولاتمام الفائدة نذكر بعض الامثلة التي نستخدم فيها اساليب خاصة لحلّ المعادلات غير الطرق العامة التي بعطناها سابقاً لترويض العقل ولذة المعازين

مثال ١. $ك^٢ + ك ى - د$ ... (١)

$ك ى + ى^٢ - ب$ ... (٢)

بجمع (١) و (٢) واستخراج الجذر الثاني $ك + ى - \sqrt{ب + د}$ ... (٣)

بقسمة (١) على (٣) $ك - \frac{د}{\sqrt{ب + د}}$

بقسمة (٢) على (٣) $ى - \frac{ب}{\sqrt{ب + د}}$

مثال ٢. $ل^٢ + م^٢ - ٩١$ ... (١)

$ل^٢ م + ل م^٢ - ٨٤$ ... (٢)

اضرب (٢) في ٢ واجمع الحاصل الى (١) فينتج

$(ل + م)^٢ - ٢٤٣$ ∴ $ل + م - ٧$ ... (٣)

اقسم (٢) على (٣) ينتج $ل م - ١٢$ ... (٤)

والآن نحل المعادلتين (٣) و (٤) بالطريقة العامة

مثال ٣. $٩ ك^٢ + ى^٢ + ١٢٨ - ٢١ (٣ ك + ى)$ ... (١)

$ك ى - ٤$ ... (٢)

من (٢) $٦ ك ى - ٢٤ - ٠$ وباضافتها الى (١) ينتج

$(٣ ك + ى)^٢ - ٢١ (٣ ك + ى) + ١٠٤ - ٠$

ومنها ينتج $٣ ك + ى - ٨$ او $٣ ك + ى - ١٣$

وبربط كل من هاتين المعادلتين مع (٢) نستخرج قيمة المجهولين

مثال ٤. $(ك^٢ + ى^٢)(ك + ى) - ١٥$

$ك^٢ + ك + ى^٢ + ى - ٨$

عوّض عن $ك^٢ + ى^٢$ بـ م وعن $ك + ى$ بـ ن

∴ $م ن - ١٥$ و $م + ن - ٨$

∴ $م - ٥$ و $ن - ٣$ او $م - ٣$ و $ن - ٥$

الخ ...

تمرين كتابي

حلّ ما يأتي :

(١) $٤(ك^{٢}+ى^{٢})-١٧ك ى$
$ك+ى=٥$

(٢) $١٠(ل^{٢}+م^{٢})-٢٩ل م$
$ل-م=٣$

(٣) $ل^{٢}+٢ل م+م^{٢}=٦١$
$ل+م=٧$

(٤) $ل^{٢}-٣ل م+م^{٢}=٥$
$ل-م=٣$

(٥) $ل^{٢}+م^{٢}=١٥٣$
$ل^{٢}م+ل م^{٢}=١٢٠$

(٦) $ل^{٢}-م^{٢}=١٢٤$
$ل^{٢}م-ل م^{٢}=٢٠$

(٧) $ل^{٢}م^{٢}+٣٤=١٠ل م$
$ل+م=٥$

(٨) $ل^{٢}م^{٢}+٥ل م=٨٤$
$ل+م=٨$

(٩) $ل^{٢}+٤م^{٢}+٨٠=١٥ل+٤٠م$
$ل م=٦$

(١٠) $٣(ل+م)^{٢}-١٥(ل+م)+٣٣٤=٠$
$ل م=٣٥$

٣٣٨. الخطوط البيانية لمعادلات الدرجة الثانية

مثال ١ . ارسم الخط البياني للمعادلة $ى=ك^{٢}$

اولاً نرتب القيم المتقابلة او المتناظرة كما في الجدول الآتي

ك	ى	— ك	ى
٠	٠	٠	٠
٠٫٥	٠٫٢٥	— ٠٫٥	٠٫٢٥
١	١	— ١	١
١٫٥	٢٫٢٥	— ١٫٥	٢٫٢٥
٢	٤	— ٢	٤
٢٫٥	٦٫٢٥	— ٢٫٥	٦٫٢٥
٣	٩	— ٣	٩
٣٫٥	١٢٫٢٥	— ٣٫٥	١٢٫٢٥
٤	١٦	— ٤	١٦
الخ		الخ	

فاذا رسمت هذه النقط المعينة ووصل بعضها ببعض تج خط منحن يقال له القطع الكامل

[اطلب من التلميذ ان يرسم هذا الخط على الورق المربع]

ومن خصائص هذا الخط البياني انه (١) متماثل بالنسبة الى محور ى لان كل قيمة نفرضها للاحداثي الراسي [ى] تقابلها قيمتان للاحداثي الافقي [ك] متساويتان في المقدار متضادتان في العلامة . (٢) يقع بكامله فوق محور ك لان ك٢ موجبة دائماً مهما كانت قيمة ك وبالتالي تكون ى موجبة دائماً فلا تقع تحت محور ك (٣) الخط غير منطبق على نفسه ويزداد انفراجاً كلما عظمت قيمة ك

ملاحظة مهمة . خط القطع الكامل هو الخط الذي تسير فيه القذائف كقنبلة المدفع والحجارة المرشوقة

مثال ٣ . ارسم الخط البياني للمعادلة ى٢ = ك

اذا رتبنا القيم المتقابلة للحرفين ك وى ورسمنا النقط المعينة ووصلنا بعضها ببعض تج خط منحن نظير خط معادلة مثال (١) ولكنه يفرق عنه بكونه متماثل بالنسبة الى محور ك

مثال ٤ . ارسم الخط البياني للمعادلة ك٢ + ى٢ = ٢٥

نرتب اولاً القيم المتقابلة كما في الجدول الآتي

ك	ى	— ك	ى
٠	± ٥	٠	٥ +
١	″ ٤٫٩	— ١	″ ٤٫٩ —
٢	″ ٤٫٦	— ٢	″ ٤٫٦ —
٣	″ ٤	— ٣	″ ٤ —
٤	″ ٢	— ٤	″ ٢ —
٥	″ ٠	— ٥	٠

فاذا رسمت هذه النقط المعينة ووصل بعضها ببعض نتج محيط الدائرة التي مركزها نقطة الاصل ونصف قطرها ٥

مثال ٤. ارسم الخط البياني للمعادلة ك ى = ٤

ولاجل سهولة العمل نضع المعادلة بالشكل ى = ك٤ التي يرى منها انه متى كانت ك = ٠ تصير ى = ∞ * ومتى كانت ى = ٠ تصير ك = ∞ ونلاحظ انه متى كانت ك ايجابية تكون ى ايجابية والعكس بالعكس متى كانت ك سلبية تكون ى سلبية وعلى ذلك يقع الخط البياني كله ويمتد الى اللانهاية في الربعين الاول والثالث وهاك جدول القيم المتقابلة

ك	ى	— ك	ى
٠	∞	٠	— ∞
١	٤	— ١	— ٤
٢	٢	— ٢	— ٢
٣	١ ٣٫	— ٣	— ١ ٣٫
٤	١	— ٤	— ١
٥	٨٫	— ٥	— ٨٫

الخ الخ

واذا رسمت هذه النقط المعينة ووصل بعضها ببعض نتج خط منحنٍ في الربعين الاول والثالث يقال له القطع الزائد القائم

* العلامة ∞ رمز الكمية "ما لا نهاية" وهي الكمية التي تكون اكبر من اي كمية يتصورها العقل ويقال لها ايضاً "اللانهاية"

مثال ٥ . حلّ ما يأتي بواسطة الرسم البياني :

ك + ى = ١٤ .... (١)

ك^{٢} + ى^{٢} = ١٠٠ .... (٢)

نجد هنا ان المعادلة (١) يمثلها خط مستقيم والمعادلة (٢) دائرة فاذا رسمت هذه الخطوط البيانية وعينت نقط التقـــاطع وقيست احداثياتها كانت النتيجة جذور المعادلتين

واذا حلت المعادلتان بالطرق الجبرية كانت الجذور ك = ٨ او ٦ و ى = ٦ او ٨ وهذا يعني ان احداثيات احدى نقطتي التقاطع (٨ و ٦) واحداثيات الثانية (٦ و ٨)

تمرين كتابي

ارسم وحلّ المعادلات الآتية :

(١) ك + ى = ١١ ك ى = ٣٠

(٢) ك + ى = ١٤ ك ى = ٤٥

(٣) ك – ى = ٣ ك ى = ٢٥

(٤) ك ى = ٢٧٤ ك – ى = ٣٣

(٥) ك^{٢} + ى^{٢} = ٢٢٥ ك + ى = ٢١

(٦) ك + ى = ٢٧ ك^{٢} + ى^{٢} = ٣٦٩

(٧) ك^{٢} + ى^{٢} = ٢٢٩ ك – ى = ١٣

(٨) ك ى = ٧٢ ك^{٢} + ى^{٢} = ١٤٥

(٩) ك^{٢} + ى^{٢} = ٣٦٥ ك ى = ١٨٢

(١٠) ى^{٢} = ٤ ك

ك + ى = ١٥

مسائل تحلّ بواسطة معادلات الدرجة الثانية

(١) مجموع عددين ٥ ومجموع مربعيهما ١٢٥ فما العددان ؟

(٢) الفرق بين عددين ٣٥ ومجموع مربعيهما ٩٣٥ فما العددان ؟

(٣) مجموع عددين ١٤ وحاصل ضربهما ٤٥ فما العددان ؟

(٤) الفرق بين عددين ١٤ وحاصل ضربهما ٩٥ فما العددان ؟

(٥) ما العددان اللذان مجموعهما ٥ امثال فرقهما وفرق مربعيهما ١٨٠ ؟

(٦) طول حقل اكثر من عرضه بـ ١٨٠ قدماً ومساحته ٤٩٥٠٠ قدم مربع فكم طوله وعرضه ؟

(٧) محيط حقل مستطيل الشكل ٤٨٠ متراً ومساحته ١٣٥٠٠ متر مربع فما طول اضلاعه ؟

(٨) قطر حقل مستطيل الشكل ٣٥ متراً ومحيطه ٧٠ متراً فما طول اضلاعه ؟

(٩) فائدة مال جورج ٢٠٠ ليرة ولو نقص رأس المال ٥٠٠ ليرة وزاد معدل الفائدة ١ ٪ لزادت الفائدة ٣٥ ليرة فكم يكون رأس المال ومعدل الفائدة ؟

(١٠) مساحة حقل مستطيل الشكل ٨٠٠ متر مربع ولو زاد طوله ٢٠ ٪ وزاد عرضه ٤ امتار لزادت مساحته ٤٤ ٪ فما طوله وعرضه ؟

(١١) تصدق كلٌّ من امين وبهيج بمبلغ ٥ ليرات انكليزية على عدد من الفقراء وكان عدد الذين احسن اليهم امين اكثر من الذين احسن اليهم بهيج بخمسة ولكن نال كل ممن احسن اليهم بهيج شلناً واحداً اكثر مما نال كل ممن احسن اليهم امين فكم كان عدد كل فريق من الفقراء ؟

(١٣) اشترى خليل عددًا من الثيران بمبلغ ٧٢٠ ليرة انكليزية فمات منها ٢ وباع كل رأس اكثر مما اشتراهُ بـ ٦ ليرات فربح ٥٪ فكم رأسًا اشترى وبكم اشترى الرأس الواحد ؟

(١٤) اذا ارتفع سعر دزينة الكتب ١٠ شلنات لنقص عدد ما تشتريه منها بخمس ليرات انكليزية ٦ كتب فكم يكون ثمن الكتاب ؟

(١٤) مجموع عددين وحاصل ضربهما ٢٤ واذا طرحنا ٥ اضعاف مجموعهما من مجموع مربعيهما كان الباقي ٨ فما العددان ؟

(١٥) وتر مثلث قائم الزاوية اقل من مجموع الساقين بستة امتار ومساحة المثلث ٦٠ مترًا مربعًا فكم طول كل من الساقين ؟

(١٦) احد ساقي مثلث قائم الزاوية اقصر من الساق الآخر بـ ٢٥ مترًا ومساحة المثلث ٦٢٥ مترًا مربعًا فكم طول كل من الساقين ؟

(١٧) سار انيس وصادق في وقت واحد من مدينتين المسافة بينهما ١٨٠ ميلاً قاصدًا كل منهما المدينة الاخرى وكان انيس يسير يوميًا ٦ اميال اكثر من صادق الذي كانت سرعتهُ في اليوم ضعف عدد الايام التي مرت قبل ان يلتقيا فكم كانت سرعة كلٍّ منهما ؟

(١٨) اذا زادت سرعة القطار ٥ اميال في الساعة فانهُ يبلغ المحطة قبل الوقت المعين بـ ٤٧٫٥ دقيقة واذا نقصت ٥ اميال في الساعة فانهُ يتأخر ٥٠ دقيقة فكم سرعتهُ وكم طول المسافة التي يقطعها ؟

(١٩) جد عددًا مؤلفًا من رقمين الفرق بين مكعبيهما ١٠٩ اضعاف الفرق بينهما (الرقمين) والعدد يزيد عن ضعف حاصل الرقمين بمقدار رقم منزلة الآحاد

(٣٠) اذا استغرق دولاب عربة محيطه ١٤ ٢/٣ قدماً ثانية واحدة في كل دورة يدورها فسرعة العربة تقل ٢ ٢/٣ الميل في الساعة فكم تكون سرعتها ؟

(٣١) حاصل ضرب مجموع عددين في مجموع مربعيهما ٤٠ وحاصل ضرب فرقهما في فرق مربعيهما ١٦ فما العددان ؟

(٣٢) خرج يوسف وعادل في ذات الوقت من مدينتين البعد بينهما ٣٥ ميلاً قاصداً كلٌّ منهما المدينة الاخرى وكان يوسف اسرع من عادل بميل ونصف الميل في الساعة وبعد ان سار ساعتين استراح ساعة ونصف ثم تابع سيرهُ فالتقى بعادل في منتصف الطريق فكم كانت سرعة كلٍّ منهما ؟

(٣٣) قام قطاران في وقت واحد من محطتي ب وح والمسافة بينهما ٣٠٠ ميل قاصداً كل منهما المحطة الاخرى وبعد ان التقيا وصل القطار القائم من ب محطة ح بعد مضي ٩ ساعات ووصل القائم من ح محطة ب بعد مضي ٤ ساعات فكم كانت سرعة كلٍّ منهما ؟

(٣٤) سار قطار ب من محطة ج الى محطة ص والمسافة بينهما ٢٤٠ ميلاً بسرعة منتظمة وبعد ساعة قام قطار آخر د من محطة ج ووصل بعد ساعتين الى نقطة قد مرَّ بها ب قبل ذلك بـ ٤٥ دقيقة ثم زادت سرعة القطار د ٥ اميال في الساعة فوصل القطاران محطة ص في ذات الوقت فكم كانت سرعة كلٍّ منهما في البداءة ؟

(٣٥) ملء برميل م بخمسين ليترًا من الماء وبرميل خ باربعين ليترًا من الخمر ثم اخذ "ك" ليترًا من كل منهما فمزجت ثم ردت الى البرميلين وكرر ذلك مرة

اخرى فكم تكون ك اذا صار مقدار الخمر في البرميل م ٨٪ ٨ ليترات بعد المزج الثاني؟

(٣٦) خليل وسليم يملكان معًا ٢٠ بقرة باع كلٌّ منهما بقراتو بسعر يختلف عن السعر الذي باع بو الآخر ولكن مجموع الثمن كان متساويًا. ولو باع خليل بقراتو بالسعر الذي باع بو سليم لكان ثمنها ٢٢٠ ليرة ولو باع سليم بقراتو بالسعر الذي باع بو خليل لكان ثمنها ٢٤٥ ليرة فكم بقرة كان لكلٍّ منهما؟

نرجو من الاستاذ ان يطلب من التلامذة اصلاح الخطإ المدوّن في الجدول الآتي لاتمام الفائدة وتسهيل العمل

اصلاح خطإ

صفحة	سطر	خطأ	صواب
٨	٩	نومر	نومرو
٩	٥	ن	ان
١٤	١١	٥ اضعاف	ضعف
		٦ "	٣ اضعاف
٢٣	١٥	٢١٠	١٣١٠
٣٠	٣٠	دليل	يقدّر دليل
٤٧	٩	٦٨	٧٨
٧٦	٣	ان الكميات	ان كلاً من الكميات
٧٧		ضع قبل (٢٥)	استعمل المحاصر للدلالة على ان الكمية
١١٧	٨ نومرو ١٠	ن ٨ (	ن (٨
١٤٣	١	— ٥	— ٤
١٥٠	١٩ نومرو ١٣	( )	( )^{٢}
١٧٤	١٦	بالعلامتان	فالعلامتان
١٨٦	١٣	شكلها ل	شكلها ل^{٢}
١٨٧	٩	+ م	+ م^{٢}
١٩١	٢	— ٨ ك^{٢}	— ٨ ك
٢١٥	١٦	$\frac{-\text{ل}}{\text{ل} - \text{م}}$	$\frac{-\text{ل}}{\text{م} - \text{ل}}$
٢١٦	١٣	ك^{٢} — ى^{٢}	ك^{٢} — ى^{٢}
٢٣٠	١	— ى^{٢}	— ى^{٤}
٢٣٤	اسفل الوجه		سقط سهوًا نومرو (٤) و (٥)
٢٣٩	١	ومخرجه	او مخرجهُ
٢٤٠	نمرو ٨	— م/ل	— ل/م

صفحه	سطر	خطأ	صواب
٢٥٢	٥	$\frac{٢}{١١}$	$\frac{٥}{١١}$
"	٦	$\frac{٥}{١١}$	$\frac{٢}{١١}$
٢٥٤	١٧	٨	١١
٢٦٥	٢	١٢	١٧
٢٦٧	٢	-١٩	-١٩
٢٦٨	٢	$\frac{٢}{}$	$\frac{٢}{٢}$
"	١٧	وحيد	بتوحيد
٢٧٧	٧	و(٣)	و(٣)
٢٧٨	٢١	٨٨٠	٢٨٨٠
٢٧٩	١٣	د/	د/س
٢٨٣	١٨	٥٩٦	١٩٦
٢٨٣	١٧	ى ى$_{١}$	ى ى$_{٢}$
٢٨٥	١٠	اقسم	قسم
٢٩٠	نومرو ٨	٢$-$ك ى	٢ ى$-$ك
٢٩١	٤	عادله	معادلة
٢٩٨	٩	$= ل_{٢+٢+٢}$	$= -ل_{٢+٢+٢}$
٢٩٩	٦	$(٢م_{٢}ل_{٥})_{٦}$	$(-٢م_{٢}ل_{٥})_{٦}$
"	٦	$-(-٣)_{٦}-$الخ	$-(-٣)_{٦}م_{٦}$ ٢X٦ ل ٥X٦
٣٠٠	٢	$(ك_{٢}ى_{٢})$	$(ك_{٢}ى_{٢})_{٢}$
"	١٠	$(٢ل)_{٢}$	$(٢ل_{٢})_{٢}$
٣٠٢	١٢	$ل_{٦}$	$-ل_{٦}$
٣٠٣	٨	$(+٢ل_{٢}م_{٢})$	$(\pm٢ل_{٢}م_{٢})_{٤}$
"	٩	$\bar{ل}_{١٢}$	$-ل_{١٢}$
٣٠٤	٥	$٢٩ل_{٢٧}$	$٢٧ل_{٢٧}$
"	٩	$٢٤٢م_{٥٠}$	$٢٤٢م_{٥٠}$

صفحة	سطر	خطأ	صواب
٣٠٤	١٥	$٢ل$	$٢ى$
٣٠٥	١٥	$٢ل-م+م^{٢}$....على $٢ل+م$	والصواب $٢ل م$.....على $٢ل$
"	٢٢	$١٠م^{٢}$	$١٠م^{٢}$
٣٠٦	١٤ (٦)	$٣٦+م^{٤}$	$+٣٦م^{٤}$
٣٠٨	٨	$١٦٢ل^{٢}+٦ل^{٢}ى$	$\frac{ل^{٢}}{٢١٦}+\frac{ل^{٢}ى}{٦}$
٣٠٨	١٠	٢٥٠	٢٠٥
"	١٦	المتبقية	النتيجة
٣٠٩	١٦	$(٢ل^{٢})$	$(٢ل^{٢})^{٢}$
"	١٧	$(-ل)$	$(-٢ل)$
٣١٠	٨	$١٦م$	٢١٦
٣١٠	١٢	$\frac{ق^{٢}ع}{٢٠٥}$	$\frac{ق^{٢}ع}{٢^{٥}}$
٣١١	١٨	قياس	وقياس
٣١٢	١	$٢م^{٢}$	$٢م^{٢}$
"	٢	$٢م^{٢}$	$٢م^{٢}$
٣٢٣	٥	$٢م^{٢}٤ى^{٢}$....	$٢م^{٢}٤ى^{٢}$....
٣٢٨	٢٠ (١١)	خط الكسر غير ظاهر	ضع الخط
٣٣٠	١٦ (٢٥)	+	$+١$
٣٣٣	٦	$٢ك^{٢}$	$٢ك$
"	٨	ك	$ك^{٢}$
٣٣٥	٢	هي	هو
٣٤٢	٧	$\pm ١/٢$	$\pm ٢/٢$

صفحه		خطا	صواب
۳۴۴	۹	$+1$	± 1
۳۴۹	٦	$+11$	± 11
۳۵۰	٥	$ك--٨$	$ك---٥$
"	٦	$ى--٨$	$ى---٥$

DATE DUE

512:J95jA:v.1:c.1
جرداق، منصور حنا
الجبر الحديث
AMERICAN UNIVERSITY OF BEIRUT LIBRARIES
01025169

A.U.B. LIBRARY

American University of Beirut

512
J95jA
v.1
General Library

512
J95jA
v.1